EXPOSITION ÉLÉMENTAIRE

DES DIVERSES THÉORIES

DE LA

GÉOMÉTRIE MODERNE

Extrait des Mémoires de l'Académie des Sciences et Lettres de Montpellier
Section des Sciences, 1874.)

Montpellier. — Typogr. Boehm et Fils

EXPOSITION ÉLÉMENTAIRE

DES DIVERSES THÉORIES

DE LA

GÉOMÉTRIE MODERNE

PAR

J. LENTHÉRIC

PROFESSEUR A L'ÉCOLE DU GÉNIE DE MONTPELLIER.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER

Quai des Augustins, 55.

1874

ESSAI

D'EXPOSITION ÉLÉMENTAIRE DES DIVERSES THÉORIES

DE LA

GÉOMÉTRIE MODERNE

En modifiant, par un même procédé géométrique, la position de chacun des points d'une figure, on obtient une nouvelle figure qui est dite la *transformée* de la première.

Si la transformée est une figure plus simple ou dont les propriétés soient déjà connues, on conçoit qu'elle pourra faciliter l'étude de la figure primitive ; par conséquent, tout mode de transformation constitue une méthode géométrique qui présentera plus ou moins d'intérêt dans les applications.

Parmi les méthodes de ce genre, qui varient à l'infini, la plus naturelle et la plus féconde est celle que Poncelet déduisit de la *projection centrale* ou de la *perspective*.

Le tracé de la perspective d'une figure s'effectue par un procédé très-simple qui transforme chaque point en point correspondant, et chaque droite en droite correspondante de la nouvelle figure. On doit à cet éminent géomètre une autre transformation tout aussi féconde, celle des *polaires réciproques*, par laquelle chaque point devient une droite, et chaque droite un point de la nouvelle figure; d'où résulte le principe de la *dualité*.

La perspective met en évidence le *rapport anharmonique* dont la *Géométrie supérieure* de M. Chasles est le merveilleux développement.

C'est ce qui nous a fait concevoir depuis longtemps la possibilité d'une *Exposition élémentaire des diverses théories de la géométrie moderne*. On verra que chacune de ces théories se rattache à un simple fait de transformation qui, pris pour *lemme*, les rend presque intuitives.

Ce travail n'est d'ailleurs qu'une rédaction nouvelle de l'ensemble des trois Mémoires publiés dans ce Recueil en 1859, 60 et 62, et nous y avons joint des notes d'analyse pour montrer avec quelle facilité la méthode se prête au calcul.

§ I. Notions préliminaires de perspective.

1. Lorsqu'un faisceau de rayons visuels dirigés vers tous les points d'une figure de l'espace est coupé par un plan, on obtient sur ce plan, qui prend le nom de *tableau*, une figure qui est dite la *perspective* de celle de l'espace, et on appelle *point de vue* la projection de l'œil sur le tableau.

En peinture, on suppose le tableau transparent et interposé entre l'œil et la figure. Nous supposerons qu'il peut avoir une position quelconque, et la perspective d'un point situé du même côté que l'œil, par rapport au tableau, sera le point où le prolongement du rayon visuel rencontre le tableau. La perspective, dans tous les cas, est ce que Poncelet appelle la *projection centrale* de la figure sur un plan, et la position de l'œil est le *centre de projection*.

2. Le tracé de la perspective d'une figure quelconque résulte des deux principes suivants :

1° *La perspective d'une droite est une autre ligne droite qui passe par le point où le rayon visuel parallèle à la première rencontre le tableau.*

Soit (*fig.* 1) PQ le tableau, E la position de l'œil, AB une droite, et F le point où le rayon visuel parallèle rencontre le tableau. Tous les rayons visuels dirigés vers les divers points de la droite AB sont dans un même plan EAB, qui est celui des parallèles EF et AB. Donc l'intersection de ce plan avec le tableau, ou la perspective de la droite AB, est une autre droite *ab* qui passe par le point F commun aux deux plans.

Corollaire. — *Des droites parallèles concourent en perspective au même point.*

Des droites perpendiculaires au tableau concourent en perspective au point de vue.

Des droites parallèles au tableau et parallèles entre elles restent parallèles en perspective.

2° *La perspective d'un point est sur la droite qui joint la projection de ce point sur le tableau au point de vue, et divise cette droite proportionnellement aux distances de l'œil et du point au tableau.*

Projetons l'œil en O et le point A en a sur le tableau (*fig.* 2).

Le rayon visuel EA, compris dans le plan des parallèles EO et Aa, perce le tableau en A′ perspective de A. A′ est situé sur Oa, et par les triangles semblables,

$$\frac{OA'}{aA'} = \frac{EO}{Aa}.$$

Si le point A était situé du même côté que l'œil par rapport au tableau, la perspective A′ serait sur le prolongement de Oa, et les segments OA′ et aA′, au lieu d'être *additifs*, seraient *soustractifs*.

On trouve la même perspective, quelle que soit la direction suivant laquelle on projette l'œil et le point sur le tableau.

Projetons l'œil en O′, et le point A en a' suivant toute autre direction qui ne serait pas perpendiculaire au tableau. OO′ et aa' seront parallèles, et on verra, par la similitude des triangles, que la ligne O′a' passe par A′ et que

$$\frac{O'A'}{a'A'} = \frac{EO'}{Aa'}.$$

3. *Perspective d'une figure plane.* — Supposons le plan de la figure horizontal, et prenons pour tableau un plan vertical dont la position sera déterminée si l'on se donne sa trace AB, que l'on appelle *ligne de terre*, sur le plan de la figure. Rabattons le tableau autour de cette trace sur le plan de la figure, représenté par la feuille de papier sur laquelle on exécute le dessin, et soit O le rabattement du point de vue (*fig.* 3).

Un point M de la figure se projette en C sur la ligne de terre, et a sa perspective sur OC. Prenons sur une parallèle par le point O à MC, une longueur OE égale à la distance de l'œil au tableau, et joignons EM; cette ligne coupera OC en un point M′ qui sera la perspective de M. Car M′ divise OC proportionnellement aux distances OE, CM de l'œil et du point M au tableau.

Réciproquement : Pour trouver le point M qui aurait pour perspective M', joignons OM' coupant la ligne de terre en C. La parallèle, par le point C, à EO donnera le point M par son intersection avec EM'.

Connaissant la perspective M' d'un point M de la figure, le reste du tracé peut s'effectuer par de simples intersections de lignes droites, ou en ne faisant usage que de la règle.

Soit N un second point de la figure. Joignons MN coupant la ligne de terre en D. Le point D, situé sur le plan du tableau, est à lui-même sa perspective; donc celle de DM est DM', dont l'intersection avec EN donne le point N', perspective de N.

La perspective de tout autre point de la figure pourra s'obtenir sans le secours du point E. Car, soit P un troisième point de la figure. Joignons PM coupant la ligne de terre en F, et PN coupant la ligne de terre en G. Les droites FM et GN auront pour perspective FM' et GN', dont l'intersection P' sera la perspective de P.

Le tracé est susceptible de nombreuses vérifications. PP' et toutes les lignes qui joindront les points correspondants, concourront en un même point E, que nous appellerons le *point de concours*; et si l'on projette les points N P..... en *n p*..... sur la ligne de terre, les droites *n*N' *p*P'..... passeront par le point de vue O.

4. *Point de fuite.* — Nous avons vu que la perspective d'une droite AB passe par le point F, où le rayon visuel parallèle rencontre le tableau. Ce point F, perspective d'un point situé à l'infini sur AB, est dit le *point de fuite* de la droite AB.

Les points de fuite de toutes les droites que l'on pourrait tracer dans le plan de la figure sont sur une parallèle à la ligne de terre par le point de vue O.

Car tous les rayons parallèles à ces droites sont dans un même plan mené par l'œil parallèlement à celui de la figure, et l'intersection de ce plan avec le tableau est une parallèle à la ligne de terre.

En peinture, cette droite est dite *ligne d'horizon*. De là résulte ce principe fécond de Poncelet (*Prop. proj.*, 107) :

Tous les points d'un plan situés à l'infini peuvent être considérés comme distribués sur une même droite, située elle-même à l'infini sur ce plan.

Cette droite a pour perspective celle des points de fuite Oy. Par conséquent : Toutes les droites parallèles de la figure donnent en perspective des droites qui concourent sur Oy. Réciproquement : Toutes les droites de la figure qui se coupent sur Oy deviennent parallèles en perspective.

5. *Si deux figures sont en perspective, et que le plan de l'une d'elles tourne autour de la ligne de terre, les deux figures restent toujours en perspective. Le lieu de l'œil, qui change de position dans l'espace, est une circonférence dont le plan est perpendiculaire à la ligne de terre, et le rapport des distances de l'œil aux plans des deux figures reste constant.*

Supposons que le plan de la figure tourne autour de la ligne de terre emportant avec lui la ligne CM, et que OE tourne en sens contraire, autour du point O, de manière à rester parallèle à CM. La ligne qui joindrait dans l'espace le point E au point M passerait toujours par le point M', qui ne cesserait pas d'être la perspective du point M sur le tableau fixe.

Si c'est le plan de la figure qui reste invariable, que le tableau tourne autour de la ligne de terre et que E tourne autour du point O, de manière à rester parallèle à CM, le point M' ne cessera pas non plus d'être la perspective de M sur le tableau mobile. En effet, pendant que le tableau tourne, le point O décrit une circonférence qui a son centre en A, et dont le plan est perpendiculaire à la ligne de terre. Lorsque le tableau a pour trace AP sur ce plan (*fig.* 4), si l'on mène PN parallèle à AO et égale à OE, le point N sera la position de l'œil. Prenons $AQ = PN = OE$, et joignons NQ. La figure NPAQ étant un parallélogramme, Q sera le centre, et $QN = AP = OA$, sera le rayon de la circonférence que décrit l'œil.

Lorsque l'œil est en N, sa distance au tableau est la perpendiculaire ND et sa distance au plan de la figure est la perpendiculaire $NG = PB$. Par les triangles semblables, $\frac{NB}{PB} = \frac{NP}{AP}$ ou $\frac{ND}{NG} = \frac{OE}{OA} =$ const.

Ainsi, le rapport des distances de l'œil aux deux plans reste constant.

6. Ces principes de perspective pourraient suffire pour le but que nous nous proposons, mais il ne sera pas inutile d'indiquer comment on obtiendrait la perspective d'une figure quelconque de l'espace.

Il faudrait connaître les projections des divers points de la figure sur un plan horizontal et leurs distances à ce plan.

On se donnerait sur ce plan (*fig.* 5) la ligne de terre AB et le rabattement du point de vue O, supposant connue la distance de l'œil au tableau. Soit M un point de la figure se projetant en m. Abaissons du point m la perpendiculaire mC sur la ligne de terre, et prolongeons-la d'une quantité CG égale à la hauteur du point M au-dessus du plan horizontal: le point G sera la projection du point M sur le tableau, et on obtiendrait la perspective M′ en divisant OG proportionnellement aux distances EO et mC de l'œil et du point M au tableau.

Mais il est plus simple de prendre la perspective m' du point où la verticale du point M perce le plan horizontal. Cette verticale a pour perspective une perpendiculaire à la ligne de terre par le point m', et cette perpendiculaire coupe OG au point M′.

7. *Homologie.* — Poncelet appelle *homologiques* deux figures qui ont les sommets correspondants sur des droites qui concourent au même point (*centre d'homologie*) et les côtés correspondants qui se coupent sur une même droite (*axe d'homologie*).

Une figure plane et sa perspective sont homologiques. — Le point de concours E est le centre d'homologie, et la ligne de terre AB est l'axe d'homologie.

C'est par la perspective de deux figures semblables et semblablement placées que Poncelet fut conduit à l'homologie, dont la similitude n'est qu'un cas particulier, celui où l'axe d'homologie est à l'infini.

Pour construire la figure homologique à une figure, il faut se donner le centre E, l'axe AB d'homologie et le point M′ de la nouvelle figure qui correspond à un des points M de la première (*fig.* 5).

Le tracé s'effectue par de simples intersections de lignes droites. Car menons MN coupant l'axe d'homologie AB en D, et DM′ qui lui correspond dans la seconde figure, le point N résultera de l'intersection de DM' avec EN, etc.

Réciproquement : *Deux figures homologiques sont en perspective.* — Abaissons la perpendiculaire MC sur l'axe d'homologie AB, et joignons CM, coupant en O la perpendiculaire à AB par le centre d'homologie E. Prenons le point O pour point de vue, AB pour ligne de terre, et EO pour distance de l'œil au tableau ; le point M aura pour perspective M'. La droite MN coupant la ligne de terre en D aura pour perspective DM' ; et comme NN' passe par le point E, le point N' sera la perspective de N, etc.

Le point O, considéré comme appartenant à la première figure, correspond au point de la seconde situé à l'infini sur EO. On peut donc construire la figure homologique en se donnant ce point.

En effet, joignons OM coupant l'axe d'homologie en C (*fig.* 6), la parallèle par le point C à EO sera la droite correspondante de la nouvelle figure, et EM coupera cette parallèle au point M' correspondant à M, etc.

On voit que M' a pour perspective M, en prenant O pour point de vue, AB pour ligne de terre, EO pour distance de l'œil au tableau, et en supposant l'œil et les points projetés sur le tableau suivant la direction EO.

C'est ainsi qu'on est conduit au mode de transformation des figures planes, que nous allons étudier directement.

§ II. Mode de transformation des figures planes.

8. Soient deux axes Ox, Oy tracés dans le plan d'une figure, AB une parallèle à l'axe des y et E un point pris sur l'axe des x. M étant un point de la figure, joignons OM qui coupe la parallèle AB en C, et menons par le point C une parallèle à l'axe des x, qui rencontre EM en M'. M' sera le point *transformé*. En opérant de même pour chacun des points de la figure, on obtiendrait une nouvelle figure qui serait la *transformée* de la première.

N. B. — La transformée a pour perspective la figure donnée. L'axe des y est la droite qui correspond à tous les points de la transformée situés à l'infini ; l'axe des x est la direction suivant laquelle l'œil et les points sont projetés sur le tableau ; l'origine O est le point de vue, la parallèle AB est la ligne de terre, et OE est la distance de l'œil au tableau.

Réciproquement : Pour trouver le point qui se transformerait en un point donné M′, menons par M′ une parallèle à l'axe des x qui coupe AB en C, et joignons OC ; cette ligne coupera EM′ au point M.

9. *Il existe une infinité de systèmes d'axes qui donnent la même transformée.*

Menons par le point de concours E une droite quelconque Ex' qui coupe l'axe des y en O′, et joignons O′M qui rencontre la parallèle AB en C′. Les triangles EMO′, MC′M′ seront semblables, car $\frac{ME}{MM'} = \frac{MO}{MC} = \frac{MO'}{MC'}$. Donc M′C′ étant parallèle à EO′, le point M se transformera également en M′ par rapport aux nouveaux axes O′x', O′y.

Ainsi : *Tous les systèmes d'axes qui donnent la même transformée ont l'axe des* y *commun et les axes des* x *concourent en un même point* E.

Par conséquent, on pourra toujours supposer qu'on a opéré la transformation par rapport au système unique d'axes rectangulaires. Nous avons vu en effet que la perspective n'est pas altérée, quelle que soit la direction suivant laquelle on projette l'œil et les points sur le tableau.

10. *La transformée d'une ligne droite est une autre ligne droite qui coupe la parallèle* AB *au même point.*

Soit RS (*fig.* 7) une droite qui coupe l'axe des y en I, et la parallèle AB en D. M étant un point de cette droite, et M′ le point transformé, joignons DM′ et EI. Les triangles CDM′, EOI seront semblables, car $\frac{CM'}{EO} = \frac{CM}{OM} = \frac{CD}{OI}$. Donc DM′ est parallèle à EI, et tous les points de la droite RS se transforment en points correspondants d'une autre droite R′S′, qui est la parallèle à EI par le point D.

N. B. — Une transversale quelconque passant par le point de concours E donne deux points correspondants sur la droite RS et sur la transformée R′S′.

Le point I où la droite RS coupe l'axe des y correspond au point situé à l'infini sur R′S′; de même, le point J′ où la transformée R′S′ coupe la parallèle à RS par le point E, correspond au point situé à l'infini sur RS ; donc les parallèles Oy et JJ' à AB sont les droites de chaque figure qui correspondent à tous les points à l'infini de l'autre.

Les triangles EOI, DJ'H étant égaux, la distance J'H de la ligne JJ' à la parallèle AB est égale à OE. Par conséquent, lorsque $OE = OA$, la droite JJ' se confond avec l'axe des y.

En perspective, la droite Oy est l'intersection du tableau et du plan mené par l'œil, parallèlement à celui de la figure. La droite JJ' est l'intersection du plan de la figure par le plan mené par l'œil parallèlement au tableau. Les deux lignes Oy, JJ' se superposent dans le rabattement lorsque $OE = OA$.

11. *Rapport anharmonique.* — Le point M se transforme en un point M′ de la direction EM tel que $\frac{EM'}{EM} = \frac{M'P'}{MP} = \frac{AC}{MP} = \frac{OA}{OP}$. F étant le point où EM coupe la parallèle AB, $\frac{FM'}{FM} = \frac{AP'}{AP} = \frac{CM}{AP}$. Les triangles semblables EOM, MCM′ donnent $\frac{CM'}{OE} = \frac{CM}{MO} = \frac{AP}{OP}$, d'où $\frac{CM'}{AP} = \frac{OE}{OP}$: donc $\frac{FM'}{FM} = \frac{OE}{OP}$; et comme $\frac{EM'}{EM} = \frac{OA}{OP}$, il en résulte $\frac{EM'}{EM} : \frac{FM'}{FM} = \frac{OA}{OE}$.

M. Chasles appelle rapport *anharmonique* de quatre points situés sur la même droite le rapport des distances de l'un de ces points à deux des autres, divisé par le rapport des distances du quatrième point à ces deux-là. $\frac{EM'}{EM} : \frac{FM'}{FM}$ est donc le rapport anharmonique des quatre points E, M, M′, F, et ce rapport égal à $\frac{OE}{OA}$ reste constant, quelle que soit la direction de EM, d'où résulte cette nouvelle définition des figures homologiques :

Un axe AB *et un point* E *étant donnés, si de ce point on mène à chacun des points* M *d'une figure une droite* EM *qui coupe l'axe en* F, *et sur laquelle on prenne un point* M′ *déterminé par la condition que le rapport anharmonique* $\frac{EM'}{EM} : \frac{FM'}{FM}$ *soit constant, les points* M′ *forment une nouvelle figure homologique de la première.* (G. S., 520.

On peut construire le point M′, soit par la relation $\frac{EM'}{EM} = \frac{OA}{OP}$, soit par la relation $\frac{MM'}{EM} = \frac{AP}{OP}$, qui sont les formules données par M. Chasles (*Traité des coniques*, 267, 269).

12. *Transformation réciproque.* — Lorsque $OE = OA$, le rapport anharmonique $\frac{EM'}{EM} : \frac{FM'}{FM}$ devient une proportion harmonique $\frac{EM'}{EM} = \frac{FM'}{FM}$.
Ainsi, on transformerait le point M en prenant le conjugué harmonique M' de M sur EF. Mais M étant réciproquement le conjugué harmonique de M' sur EF, on retrouverait ce point M en transformant M'.

Dans ce cas, la perspective des deux figures est réciproque, comme il serait d'ailleurs facile de le démontrer directement.

M, M' divisant harmoniquement EF, les ordonnées MP, M'P' divisent harmoniquement $EA = 2OE$, et $OP \times OP' = OA^2$. (Voir la *Note à la suite de ce paragraphe.*)

13. *Les transformées d'une figure que l'on obtient en faisant varier la distance de la parallèle* AB, *sont semblables et ont le point de concours* E *pour centre de similitude.*

Soit le point M qui se transforme en un point M' de la direction EM, tel que $\frac{EM'}{EM} = \frac{OA}{OP}$. Conservons les mêmes axes et le même point de concours, mais prenons toute autre parallèle LK à l'axe des y : le point M se transformera en un point M'' de la même direction EM, tel que $\frac{EM''}{EM} = \frac{OL}{OP}$; donc $\frac{EM'}{EM''} = \frac{OA}{OL}$, ce qui prouve que M' et M'' sont des points homologues de deux figures semblables ayant le point E pour centre de similitude.

14. *Il suffira d'opérer la transformation réciproque*, ou de prendre $OA = OE$, puisque pour toute autre valeur de OA on obtiendrait une figure semblable et ayant avec celle qui résulte de la transformation réciproque un rapport de similitude connu. D'ailleurs la ligne J'J' se confond alors avec Oy, et l'on obtient des formules plus simples et réciproques lorsqu'on applique le calcul à la transformation.

x et y étant les coordonnées OP, PM du point M, et x' et y' étant celles

OP', P'M' du point transformé M', k désignant la distance OE = OA, on a, par les triangles semblables

$$x = \frac{k^2}{x'}, \qquad y = \frac{ky'}{x'},$$

et réciproquement

$$x' = \frac{k^2}{x}, \qquad y' = \frac{ky}{x}.$$

Ainsi, $f(x, y) = 0$ étant l'équation d'une courbe, celle de la transformée sera

$$f\left(\frac{k^2}{x'} \cdot \frac{ky'}{x'}\right) = 0.$$

La courbe qu'il faudrait transformer pour produire une courbe donnée $\varphi(x', y') = 0$ sera $\varphi\left(\frac{K^2}{x'}, \frac{Ky'}{x'}\right) = 0$.

Si OF = d était différent de OA = k, on aurait

$$x = \frac{kd}{x' + k - d}, \qquad y = \frac{dy}{x' + k - d},$$

d'où :

$$x' = \frac{kd}{x} + k - d. \qquad y' = \frac{ky}{x}.$$

15. Du mode de transformation, que nous supposerons toujours réciproque, à moins qu'on n'avertisse du contraire, résultent ces conséquences :

Tout point situé sur l'axe des y *se transforme en un point situé à l'infini sur une direction déterminée.*

Par exemple, le point I se transforme en un point à l'infini sur EI.

Donc : *Un système de droites qui se coupent en un même point sur l'axe des* y *se transforme en un système de parallèles à une direction déterminée.*

Réciproquement : *Tout point situé à l'infini sur une direction donnée se transforme en un point déterminé sur l'axe des* y.

Par exemple, le point à l'infini, sur la droite R'S', se transforme en un point I de l'axe des y, que l'on obtient en menant par le point de concours E une parallèle à R'S'.

Donc : *Un système de parallèles se transforme en un système de droites qui se coupent en un point déterminé de l'axe des* y.

Une parallèle à l'axe des y *se transforme en une autre parallèle à cet axe.*

Par exemple, PM se transforme en P'M', telle que $OP \times OP' = OA^2$.

Les deux parallèles sont situées d'un même côté de l'axe des y, et si l'une se rapproche de cet axe, l'autre s'en éloigne. L'axe des y se transforme en une droite à l'infini, et la parallèle AB, se transformant en elle-même, est une droite commune aux deux figures.

Une parallèle à l'axe des x *se transforme en une autre droite qui passe par l'origine, et réciproquement.*

Par exemple, CM' se transforme en CO, et réciproquement.

A l'aide de ces principes, il sera facile de se faire une idée de la transformée d'une figure quelconque composée, comme on le voudra, de points, de droites et de lignes polygonales ou courbes, sans qu'il soit nécessaire d'opérer la transformation, que l'on pourrait d'ailleurs effectuer au besoin.

NOTE.

Proportion harmonique. — Étant donné un point, sur une droite AB, il existe un autre point dont le rapport des distances aux deux extrémités de la droite est le même que le rapport des distances du premier.

Soit le point C situé entre A et B (*fig.* 8); une transversale passant par ce point donnera, sur des parallèles par A et B, deux segments AE, BF de direction contraire; prolongeant l'un de ces segments AE d'une longueur égale AG, et joignant GF, cette ligne coupera AB en un point D, tel que

$$\frac{DA}{DB} = \frac{AE}{BF} = \frac{CA}{CB}.$$

Soit le point D situé sur le prolongement de AB ; une transversale passant par ce point donnera, sur des parallèles par A et B, deux segments AG, BF de même direction; prolongeant l'un de ces segments AG d'une longueur égale AE et joignant EF, cette ligne coupera AB en un point C, tel que

$$\frac{CA}{CB} = \frac{AG}{BF} = \frac{DA}{DB}.$$

Il résulte de cette construction que les points C et D sont situés, l'un sur la droite AB, l'autre sur son prolongement, d'un même côté du milieu O; à droite si le rapport des distances est plus grand que l'unité, à gauche si le rapport est plus petit que l'unité.

Les géomètres grecs appelèrent la proportion $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$ proportion *harmonique*, parce qu'elle jouait un certain rôle dans leur théorie des tons musicaux. Cette dénomination s'est conservée, et on dit que les points C et D *divisent harmoniquement* AB, ou qu'ils sont *conjugués harmoniques* sur cette droite.

Réciproquement, A et B sont conjugués harmoniques sur CD, car la proportion peut s'écrire $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$.

On voit qu'il existe une infinité de systèmes de points conjugués harmoniques sur une droite AB, soit à droite, soit à gauche du milieu O, qui a son conjugué à l'infini; car si C coïncide avec O, AE = BF, et GF est parallèle à AB.

Le produit des distances de deux points conjugués au milieu de la droite est égal au carré de la moitié de la droite.

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}, \text{ ou } \frac{AO+OC}{AO-OC} = \frac{AO+OD}{OD-AO} \text{ donne}$$

$$\frac{AO}{CO} = \frac{DO}{AO}, \text{ d'où } CO \times DO = AO^2.$$

Comme le point C situé sur AB divise cette droite dans le rapport $\frac{AE}{BF}$, on dit par extension que le point D divise cette droite dans le même rapport. Dans le premier cas les segments sont additifs, et dans le second ils sont soustractifs.

Si le rapport est nul, ou si AE = 0, les deux points coïncident avec A. Si le rapport est infini, ou si BF = 0, ils coïncident avec B.

Les deux rapports $\frac{CA}{CB}$, $\frac{DA}{DB}$ sont égaux en valeur absolue, mais dans le premier les segments ont des directions contraires, tandis que dans le second ils ont la même direction. On dit que le rapport est *positif* ou *négatif*, et on lui donne le signe + ou le signe —, suivant que les segments ont même direction ou des directions contraires. C'est pour cela que M. Chasles écrit la proportion harmonique $\frac{DA}{DB} = - \frac{CA}{CB}$.

En ayant égard à la valeur absolue du rapport et à son signe, il n'existe qu'un point qui divise une droite AB *dans un rapport donné.*

Pour trouver ce point, on prendra sur des parallèles par A et B deux segments qui soient, dans le rapport donné, de même direction, comme AG, BF, si le rapport est positif, ce qui donnera le point D; et de sens contraire, comme AE, BF, si le rapport est négatif, ce qui donnera le point C.

Rapport anharmonique. — Étant donné un point C sur une droite AB, on peut déterminer plus généralement un autre point D de la droite par la condition que le rapport $\frac{DA}{DB}$ soit un multiple de $\frac{CA}{CB}$, ou que le rapport composé $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$ ait une valeur λ donnée en grandeur et en signe. M. Chasles appelle ce rapport composé, rapport *anharmonique*, parce qu'on retrouve la proportion, ou le rapport harmonique, lorsque $\lambda = -1$.

La relation $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \lambda$ donne $\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{\lambda CB} = \lambda'$, ce qui revient à diviser la droite AB dans un rapport donné λ' en grandeur et en signe.

Menons par le point C (*fig.* 9) une transversale qui donne sur les parallèles par A et B les segments AE, BF, tels que $\frac{CA}{CB} = \frac{AE}{BF}$. Prenons sur AE ou sur son prolongement, suivant le signe de λ', un segment AH tel que $\frac{AE}{AH} = \lambda'$ et joignons HF. Cette droite coupera AB au point D, tel que $\frac{DA}{DB} = \frac{AH}{BF}$. Donc $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{AE}{AH} = \lambda'$.

Le quatrième point D se confond avec un des trois autres, lorsque λ' est nul, infini ou égal à 1; car si $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = 0$, $CA \times DB = 0$, ce qui exige que D coïncide avec B. Si $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \infty$, $CB \times DA = 0$, ce qui exige que D coïncide avec A.

Si $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$, les deux rapports sont égaux et de même signe, ce qui exige que D coïncide avec C.

Coordonnées. — On détermine la position d'un point, sur un plan, en se donnant ses distances à deux droites qui se coupent sur ce plan. Ces distances, que l'on prend parallèlement aux droites, d'un côté ou de l'autre, sont appelées les *coordonnées* du point, et les droites sont dites les *axes des coordonnées*. Le point d'intersection des axes est l'*origine* des coordonnées.

Ox, Oy étant les deux axes (*fig.* 1) et M un point de leur plan, les coordonnées sont OP et PM. On donne plus particulièrement à l'une d'elles, OP, le nom d'*abscisse*; et l'autre, PM, prend le nom d'*ordonnée*. Les abscisses se désignent généralement par la lettre x, et les ordonnées par la lettre y. Ainsi chaque point du plan a son x et son y, au moyen desquels on peut le construire.

On appelle *axe des abscisses*, ou *axe des* x, celui sur lequel on prend les abscisses; l'autre est dit *axe des ordonnées*, ou *des* y. Le plus souvent, on choisit les axes se coupant à angle droit: les coordonnées sont alors appelées *rectangles* ou *rectangulaires*.

L'invention des coordonnées est due à Descartes, qui ramena ainsi les notions de forme à des notions de position, et par suite à des notions purement numériques: ce qui permit d'appliquer le calcul à l'étude de la géométrie.

§ III. Méthode géométrique qui résulte de la transformation.

16. Une figure peut se transformer de bien des manières, suivant le choix des axes et la distance de la parallèle.

Les points donnent des points correspondants, et les droites des droites correspondantes de la nouvelle figure.

A des lignes polygonales, correspondent des lignes polygonales d'un même nombre de côtés.

A des courbes, correspondent des courbes *d'un même degré*, c'est-à-dire des courbes qu'une droite coupe en un même nombre de points.

Les tangentes à une courbe se transforment en tangentes de la nouvelle courbe, aux points correspondants.

Si une tangente a son point de contact sur l'axe des y, la tangente à la nouvelle courbe aura son point de contact à l'infini, et deviendra ce qu'on appelle une *asymptote* de la nouvelle courbe.

Supposons que l'on transforme une courbe fermée :

1° Si l'axe des y ne rencontre pas la courbe, on obtiendra une courbe fermée du même degré.

2° Si l'axe des y coupe la courbe, la transformée aura des branches infinies dont les asymptotes seront les transformées des tangentes à la courbe primitive, aux points où elle coupe l'axe des y. Ces asymptotes, faciles à construire, feront connaitre les directions vers lesquelles tendent de plus en plus, sans pouvoir jamais les atteindre, les branches infinies de la nouvelle courbe.

3° Si l'axe des y est tangent à la courbe, la transformée aura des branches infinies pour chacune desquelles la direction asymptotique subsistera, car ce sera celle de la droite qui joindrait le point de concours E au point de contact de l'axe des y avec la courbe. La branche infinie de la nouvelle courbe tendra de plus en plus à devenir parallèle à cette direction, mais il n'y aura pas d'asymptote, car l'axe des y se transforme en une droite quelconque située à l'infini. Par conséquent : *Il ne peut exister de courbe fermée d'un degré quelconque, sans qu'il existe des courbes du même degré ayant des branches infinies, avec ou sans asymptotes, et le nombre des asymptotes réelles sera au plus égal au degré de la courbe.*

Le sens de la courbure de la transformée en un point quelconque est facile à prévoir, d'après celui de la ligne donnée au point correspondant.

Si la courbe est *concave* vers l'axe des x comme au point M (*fig.* 10), c'est-à-dire située aux environs de ce point, de part et d'autre, *au-dessous* de la tangente, il en sera de même pour la transformée au point M′ Si la courbe est *convexe* vers l'axe des x comme au point N, c'est-à dire située aux environs de ce point, de part et d'autre, *au-dessus* de la tangente, il en sera de même pour la transformée au point N′.

Par rapport à l'axe des y, la courbure de la transformée sera en sens inverse de celle de la ligne donnée, car plus un point se rapproche de l'axe des y, plus le point transformé s'éloigne de cet axe.

Donc : à un point d'*inflexion*, c'est-à-dire à un changement dans le sens de la courbure, comme en P, correspondra un point d'inflexion de la transformée en P'.

17. *Courbes du second degré.* — Appliquons ces principes à la transformation du cercle : nous en déduirons la classification et la forme des courbes du second degré.

1° Si l'axe des y est extérieur au cercle, la nouvelle courbe sera fermée sans inflexion, comme le cercle, et ne pourra être coupée, comme lui, par une droite en plus de deux points. Elle aura la forme d'un ovale, et on l'appelle *ellipse*.

2° Si l'axe des y coupe le cercle, les deux arcs situés de part et d'autre de cet axe, étant concaves vers l'axe des y, produiront chacun une courbe continue toujours convexe vers cet axe.

Ces deux courbes seront séparées, mais auront pour asymptotes communes les transformées des deux tangentes au cercle par les points où il coupe l'axe des y. Ainsi, la courbe sera formée de deux parties, ou de deux *branches* distinctes, comprises entre les deux côtés de deux angles opposés par le sommet, et s'approchant sans cesse de ces côtés sans pouvoir jamais les atteindre. Cette nouvelle courbe a reçu le nom d'*hyperbole*.

3° Si l'axe des y est tangent au cercle, la transformée se composera d'une seule branche ouverte, convexe vers l'axe des y. La direction asymptotique subsistera, et la courbe tendra de plus en plus à devenir parallèle à cette direction, ce qui la distingue d'une branche d'hyperbole; mais elle n'aura pas d'asymptote, ou pour mieux dire l'asymptote est une droite à l'infini, à laquelle elle tend à devenir tangente. Cette nouvelle courbe est la *parabole*.

Donc il existe trois sortes de courbes du second degré : l'ellipse, qui comprend le cercle, l'hyperbole et la parabole.

Puisqu'elles sont en perspective avec le cercle, elles sont des sections planes d'un cône qui aurait pour base ce cercle : de là vient la dénomination de *sections coniques*, ou plus simplement de *coniques*, donnée aux courbes du second degré.

La transformation indique la propriété commune par laquelle on les définit ordinairement.

Nous avons vu qu'un point M se transforme en un point M′ de la direction EM, tel que $\frac{EM'}{EM} = \frac{OA}{OP}$. Comme $OP \times OP' = OA^2$, $\frac{EM'}{EM} = \frac{OP'}{OA}$, d'où $\frac{EM'}{OP'} = \frac{EM}{OA}$.

Si le point M décrit un cercle ayant pour centre le point E, $\frac{EM}{OA}$ sera constant, et le point M′ décrira une conique telle que $\frac{EM'}{OP'}$ sera constant. Or EM′ est la distance du point M′ à un point fixe E, et OP′ est la distance du même point à la droite fixe prise pour axe des y, quelle que soit d'ailleurs la position de cet axe par rapport au cercle. Par conséquent :

Une conique est le lieu des points dont les distances à un point fixe et à une droite fixe sont dans un rapport constant.

Le point fixe est appelé le *foyer* de la conique, et la droite fixe en est dite la *directrice*.

La nature de la conique dépend du rapport constant $\frac{EM}{OA} = \frac{EM}{OE}$.

Si le rapport est plus petit que l'unité, l'axe des y est extérieur au cercle, et la conique est une *ellipse*.

Si le rapport est plus grand que l'unité, l'axe des y coupe le cercle, et la conique est une *hyperbole*.

Si le rapport est égal à l'unité, l'axe des y touche le cercle, et la conique est une *parabole*.

Réciproquement : *Toute conique se transforme en un cercle, en prenant son foyer pour point de concours et sa directrice pour axe des* y.

Car on a : $\frac{EM'}{EM} = \frac{OA}{OP}$, d'où $\frac{EM}{OP} = \frac{OA}{EM'}$. Si le point M décrit une conique dont E soit le foyer et l'axe des y la directrice, $\frac{EM}{OP}$ sera constant, et par suite, EM′ étant constant, le point M′ décrira un cercle ayant pour centre le foyer.

On vient de voir que les coniques sont des sections planes d'un cône ayant pour base un cercle. Il est facile de démontrer que ces courbes sont des sections planes d'un cône ayant pour base l'une quelconque d'entre elles, et nous montrerons par cet exemple comment la transformation peut s'appliquer à l'étude des figures de l'espace.

Soit une surface conique (*fig*. 11) ayant pour base une courbe C du second degré, et pour sommet un point S qui se projette en s sur le plan de la base.

Cherchons la section de la surface par un plan qui ferait un angle α avec la base, et qui aurait AB pour trace.

Abaissons la perpendiculaire sA sur la trace, élevons dans le plan de la base, sur As, la perpendiculaire sS, égale à la hauteur du cône, et menons par le point S une ligne SO qui fasse avec OA une angle SOA égal à l'inclinaison α du plan sécant. La parallèle Oy à AB sera la trace d'un plan parallèle au plan sécant et passant par le sommet du cône.

Cela posé, prenons cette trace Oy pour axe des y, la perpendiculaire sA pour axe des x, AB pour parallèle, et pour point de concours un point E sur l'axe des x tel que OE soit égal à OS.

La conique C se transformera en une conique C′, et nous aurons trois cas à considérer.

1° Si l'axe Oy est extérieur à la conique C, la transformée C′ sera une ellipse; et comme le plan mené par Oy et par le sommet du cône ne contiendra aucune de ses génératrices, le plan donné coupera toutes ces génératrices sur une des *nappes* de la surface conique, c'est-à-dire sur un des deux cônes opposés par le sommet dont l'ensemble forme la surface conique.

2° Si l'axe des y coupe la conique C, la transformée C′ sera une hyperbole; et comme le plan mené par Oy et le sommet du cône contiendra deux de ses génératrices, le plan donné sera parallèle à ces deux génératrices, et coupera toutes les autres sur l'une et sur l'autre des nappes de la surface conique.

3° Si l'axe des y touche la conique C, la transformée sera une parabole; et comme le plan mené par Oy et par le sommet du cône sera tangent au cône suivant une génératrice, le plan donné sera parallèle à cette génératrice, et coupera toutes les autres sur une même nappe de la surface conique.

Or, la transformée C′ est, dans tous les cas, en perspective avec la base C de la surface conique, et les deux courbes ne cessent pas d'être en perspective, pendant que le plan de l'une d'elles C′ tourne autour de la ligne de terre AB. Donc, lorsque le plan de C′ coïncidera avec le plan donné, on fera un angle α avec la base, l'œil viendra se placer au sommet du cône, et la transformée C′ sera l'intersection de la surface conique par ce plan.

On distingue les propriétés des figures en propriétés *projectives*, ou de situation, et en propriétés métriques, ou de *grandeur*.

18. *Les propriétés projectives d'une figure ne sont pas altérées par la transformation.*

Car à une figure correspond une figure analogue quant au nombre de points, de droites, de lignes polygonales ou courbes, et on a vu que des points en ligne droite se transforment en tout autant de points en ligne droite; que des droites se coupant en un même point se transforment en tout autant de droites se coupant aussi en un même point; que des tangentes ou des sécantes à une courbe se transforment en tangentes ou en sécantes à une courbe de même degré. Par conséquent:

Pour être en droit de conclure qu'une figure jouit d'une propriété projective, il suffit de constater qu'on pourrait la transformer en une autre pour laquelle cette propriété existe ou soit facile à démontrer.

Hâtons-nous d'éclaircir ces généralités par des exemples.

Deux triangles qui ont les sommets correspondants sur trois droites qui concourent en un même point, ont les côtés correspondants qui se coupent sur une même droite.

Prenons pour axe des y la droite passant par le point où se coupent deux couples de côtés correspondants: il en résultera deux nouveaux triangles ayant, comme les premiers, les sommets sur trois droites qui concourent en un même point, mais deux couples de côtés correspondants parallèles, et par conséquent semblables. Les troisièmes côtés étant aussi parallèles, les côtés correspondants des triangles primitifs se couperont sur l'axe des y.

Réciproquement: *Deux triangles qui ont les côtés correspondants qui se coupent sur la même droite, ont les sommets correspondants sur trois droites concourantes en un même point.*

Prenons pour axe des y la droite sur laquelle se coupent les côtés correspondants. Il en résultera deux nouveaux triangles ayant les côtés parallèles, et par conséquent semblables. Les sommets correspondants seront situés sur trois droites concourant au centre de similitude; donc les triangles primitifs auront aussi les sommets sur trois droites concourantes en un même point, qui sera le transformé du centre de similitude.

Par un point donné M *mener une droite qui passe par le point de concours de deux droites données* AB, CD, *en ne faisant usage que de la règle.*

Menons par un point S (*fig.* 12) deux transversales dont l'une passe par le point M, qui forment avec les deux droites données un quadrilatère ABCD. Ce quadrilatère se transformerait en parallélogramme si l'on prenait pour axe des y la droite passant par le point S et par le point de concours des deux droites données. L'inspection de la nouvelle figure indiquera cette solution du problème proposé.

Tracez les diagonales AC, BD du quadrilatère ABCD, et la droite SE qui passe par leur intersection; joignez MC coupant SE en F, et DF coupant BC en N; MN sera la droite demandée.

En joignant MB coupant SE en G, la ligne AG passera aussi par le point N, ce qui servira de vérification.

N. B. — La construction s'applique évidemment au cas où, les droites AB et CD étant parallèles, on voudrait mener par le point M une troisième parallèle, et peut s'effectuer sur le terrain par la méthode des alignements.

Mener par un point une tangente à une conique, en ne faisant usage que de la règle.

On peut considérer la conique comme la transformée d'un cercle. Or, les droites qui joignent deux à deux les extrémités de deux cordes parallèles d'un cercle se coupent sur le diamètre qui joint les points de contact des tangentes au cercle parallèles à ces cordes.

Donc, si l'on mène par le point deux sécantes à la conique, les droites qui joindront deux à deux les intersections de ces sécantes avec la courbe se couperont sur la corde de contact des tangentes à la conique par le point donné.

Étant pris sur deux droites deux séries de trois points correspondants A, B, C, *et* A′, B′, C′, *les points de croisement* M, N, P des *diagonales* AB′ *et* BA′, AC′ *et* CA′, CB′ *et* BC′, *seront en ligne droite* (*fig.* 13).

Transformons la figure en prenant une des deux droites, par exemple celle qui contient les points A′, B′, C′, pour axe des y. Les lignes BA′, CA′, deviendront deux parallèles ba', ca'. Les lignes AC′, BC′ deviendront deux autres parallèles ab', cb', et les lignes AB′, CB′ deux autres parallèles ab', cb'. Il en résultera une nouvelle figure, et pour démontrer que les points M, N, P, de la première sont en ligne droite, il suffira de démontrer que les points correspondants m, n, p, de la seconde sont en ligne droite, ce qui revient à prouver que les triangles mrn, nsp sont semblables. Les côtés rm et rn du premier étant respectivement parallèles aux côtés sn, sp du second, il reste à démontrer la proportionnalité de ces côtés. Les triangles mra, psc étant semblables, $\frac{rm}{ra} = \frac{sc}{sp}$, d'où $ra \times sc = rm \times sp$. Les triangles semblables arb, bsc donnent $\frac{rb}{ra} = \frac{sc}{sb}$, ou $\frac{sn}{ra} = \frac{sc}{rn}$, d'où $ra \times sc = sn \times rn$; donc $rm \times sp = sn \times rn$, ou $\frac{rm}{rn} = \frac{sp}{sc}$ *c.q.f.d.*

La transformation de la figure indique que ce théorème, dont la démonstration paraît insoluble par la géométrie ordinaire, se ramène à cette proposition élémentaire :

Étant donné un parallélogramme b r n s, *si par un sommet* b *on mène une transversale coupant les côtés de l'angle opposé* n *en* a *et* c, *et que par ces points on mène des parallèles dans une direction quelconque, ces parallèles couperont les côtés de l'angle* b *en deux points* m *et* p *en ligne droite avec le sommet opposé* n.

Mais le parallélogramme *brns* est le transformé du quadrilatère BRNS, d'où résulte ce nouveau théorème :

Étant donné un quadrilatère BRNS, *si par le sommet* B *on mène une transversale coupant les côtés de l'angle opposé* N *en* A *et* C, *et que l'on joigne ces points à un point quelconque* B′ *pris sur la ligne* A′C′ *sur laquelle concourent les côtés opposés, les droites* AB′, CB′ *couperont les côtés de l'angle* B *en deux points* M, P *en ligne droite avec le sommet opposé* N.

Enfin, si l'on remarque que les six points A,B,C et A′,B′,C′ forment un hexagone AB′CA′BC′A inscrit aux deux droites AC et A′C′, et que les côtés opposés de cet hexagone sont les diagonales AB′ et BA′, CB′ et BC′, CA′ et AC′, on voit que le théorème primitif revient au suivant :

Dans tout hexagone inscrit à deux droites, les côtés opposés se coupent en trois points situés sur la même droite.

Ce théorème lui-même se ramène par la transformation à cette propriété élémentaire du trapèze :

Par le point de concours E *des côtés d'un trapèze* ABCD (*fig.* 14), *menons une transversale qui coupe les bases en* a *et* a'; *les parallèles menées par ces points respectivement aux côtés du trapèze se coupent sur une des diagonales du trapèze.*

Car la parallèle au côté BC par le point a coupe la diagonale AC au point m, et $\frac{Am}{Cm} = \frac{Aa}{Ba} = \frac{Da'}{Ca'}$: donc $a'm$ est parallèle à l'autre côté DA. De même la parallèle à AD par le point a coupe la diagonale BD en m', et $a'm'$ est parallèle à l'autre côté BC.

Cela posé, transformons la figure en prenant pour axe des y une droite quelconque. Le trapèze deviendra un quadrilatère dont les côtés opposés AB, DC se coupent en S sur la droite prise pour axe des y, et dont les autres côtés AD, BC couperont cet axe en O et O' (*fig.* 15).

En menant par un point quelconque E une transversale qui coupe les côtés AB, DC en a et a', les lignes O'a et Oa' concourront sur la diagonale AC en m, et on aura un hexagone EO'a'SaOE inscrit à deux droites OO' et Ea dont les côtés opposés se couperont en trois points C, m, A, situés en ligne droite.

Mais l'inspection de la figure indique ce nouveau théorème :

Étant donné un angle ASC *et deux points* O *et* O' *en ligne droite avec le sommet* S, *si autour d'un point quelconque* E *on fait tourner une droite qui coupe ces côtés de l'angle en* a *et* a', *le point de rencontre des deux lignes* Oa et Oa' *décrira une droite* AC. *De même, le point de rencontre des deux lignes* Oa' *et* O'a *décrira une autre droite* BD.

Réciproquement : *Si autour des deux points* O, O', *on fait tourner deux rayons dont l'intersection* m *glisse sur une droite* AC, *la droite* aa' *pivotera autour d'un point fixe* E.

Ce théorème se ramène, par la transformation, à la réciproque de celui démontré pour le trapèze :

Si par un point m *de la diagonale* AC *d'un trapèze on mène des parallèles* ma, ma' *aux côtés, la ligne* aa' *passera par le point de concours* E *de ces côtés.*

Car $$\frac{Aa}{Ba} = \frac{Am}{Cm} = \frac{Da'}{Ca}.$$

Il n'est point de théorème ou de problème dont on ne puisse de même transformer l'énoncé en transformant la figure qui s'y rapporte. Les propositions les plus élémentaires peuvent ainsi conduire à des propositions dont on n'aurait pas soupçonné l'existence, souvent très-difficile à démontrer directement; et des propositions qui paraissent d'abord présenter des difficultés se ramènent à d'autres qui sont évidentes ou dont la démonstration est facile, ce qui fait naître les rapprochements les plus inattendus.

19. *Les propriétés métriques sont généralement altérées par la transformation.*

Il faudra donc étudier les modifications qu'elles peuvent subir, ou savoir les transformer en d'autres qui soient projectives. Bornons-nous à étudier celles qui se présentent le plus souvent.

Transformation des angles. — On a vu que la direction de la transformée d'une droite s'obtient en joignant le point de concours E au point où la droite coupe l'axe des y. Soient deux droites qui coupent cet axe en A et B, l'angle des transformées sera égal à AEB, quelles que soient d'ailleurs les directions des deux droites. Pour transformer deux droites en deux autres qui se coupent sous un angle donné, on prendra pour axe des y une droite quelconque qui coupe les deux droites en A et B. Le lieu du point E sera le segment de cercle décrit sur AB, et capable de l'angle donné; le lieu de l'œil qui dans l'espace verrait les deux droites se coupant sous cet angle, sera la surface de révolution engendrée par le segment de cercle tournant autour de AB.

Si l'on prend le point E sur la circonférence ayant AB pour diamètre, les nouvelles droites seront rectangulaires. L'origine O sera la projection du point E sur AB, et on aura $OA \times OB = OE^2$.

Réciproquement : *Deux droites qui déterminent sur l'axe des* y, *de part et d'autre de l'origine* O, *des segments tels que* $OA \times OB = OE^2$, *se transforment en deux droites rectangulaires.*

Car le triangle AEB sera rectangle en E.

Soient A, B, C, les points où les trois côtés d'un triangle coupent l'axe des y. On pourra transformer ce triangle en un autre qui ait des angles donnés, ou qui soit semblable à un triangle donné. En effet, décrivons sur

AB un segment de cercle capable de l'un des angles du nouveau triangle, et sur BC ou AC un segment de cercle capable d'un autre angle. Ces segments se couperont en un second point E qui sera le point de concours. Le lieu de l'œil sera la circonférence décrite par ce point dans un plan perpendiculaire à l'axe des y.

Soit ABCD un quadrilatère dont les côtés opposés se coupent en F et en G (*fig.* 16). L'ensemble de la figure est ce qu'on appelle un *quadrilatère complet*, et la droite FG qui joint les points de concours des côtés opposés est dite la *troisième diagonale* du quadrilatère complet. En prenant cette troisième diagonale FG pour axe des y, le quadrilatère complet se transformera en un parallélogramme, d'où il résulte que *le parallélogramme a une troisième diagonale à l'infini*. En prenant le point de concours E sur un segment de cercle décrit sur FG, et capable d'un angle donné, on obtiendrait un parallélogramme dont les côtés se couperaient sous cet angle.

On obtiendrait un rectangle en prenant le point E sur la circonférence ayant pour diamètre FG.

On obtiendrait un carré en prenant le point E à l'intersection des circonférences décrites sur FG et HK comme diamètres.

On obtiendrait un trapèze en prenant pour axe des y une droite quelconque passant par une des extrémités de la troisième diagonale, d'où l'on voit que la *troisième diagonale d'un trapèze est la parallèle aux bases par le point de concours des côtés*.

La transformation des angles conduit à un nouveau tracé de la perspective que nous croyons devoir signaler.

Soient P et Q (*fig.* 17) deux points quelconques sur l'axe des y, et M un point de la figure. Menons par ces points deux droites MP, MQ, qui coupent la parallèle AB en C et D. PEQ sera l'angle des transformées de ces droites, et le point M' sera l'intersection des parallèles par C et D aux directions EP, EQ. Comme vérification, la droite MM' devra passer par le point E.

Transformation des distances. — Soient OP,OQ les abscisses de deux points d'une droite, et OF une parallèle à cette droite par l'origine O (*fig.* 18). Le segment MN compris entre les ordonnées correspondantes sera égal à la distance des deux points de la droite. Les abscisses OP,OQ se transformeront en $OP' = \frac{OA^2}{OP}$ et $OQ' = \frac{OA^2}{OQ}$. Les ordonnées correspondantes interceptent sur la parallèle OG, à la transformée de la droite, un segment M′N′ dont il faut trouver le rapport avec MN.

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{OF}{OA} \text{ et } \frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{OG}{OA},$$

d'où $\frac{M'N'}{MN} = \frac{OG}{OF} \times \frac{P'Q'}{PQ}$. $P'Q' = OP' - OQ' = \frac{OA^2}{OP} - \frac{OA^2}{OQ}$

$$= \frac{OA^2.PQ}{OP.OQ}; \text{ donc } M'N' = \frac{OA^2.OG}{OF} \times \frac{MN}{OP \times OQ}.$$

Désignons par λ la constante $\frac{OA^2 \times OG}{OF}$, qui sera la même pour tous les segments pris sur une même droite, par a, b les abscisses OP et OQ, et par D et D′ les distances MN et M′N′; nous aurons la formule

$$D' = \lambda \frac{D}{ab} \tag{1}$$

analogue à celle que donne Poncelet (*Prop. Project.*, 9).

Si OA était différent de OE, en désignant par D″ la distance D transformée, on aurait $D'' = \frac{OE}{OA} \times D'$; d'où

$$D'' = \frac{OA \times OE \times OG}{OF} \times \frac{D}{OP \times OQ}.$$

Ce qui revient à remplacer le facteur OA^2 de la constante λ par $OE \times OA$. Ainsi la formule (1) s'applique à tous les cas.

Soient trois points A, B, M situés sur la même droite, a, b, m leurs abscisses respectives, et A′, B′, M′ les points transformés; on aura par la formule (1)

$$A'M' = \lambda \frac{AM}{am}, \quad B'M' = \lambda \frac{BM}{bm};$$

d'où

$$\frac{A'M'}{B'M'} = \frac{b}{a} \cdot \frac{AM}{BM},$$

ou

$$\frac{A'M'}{B'M'} = \omega \cdot \frac{AM}{BM}. \tag{2}$$

La constante ω désigne le rapport inverse $\frac{b}{a}$ des abscisses des deux points A et B dont on prend les distances à un troisième M.

Il est d'ailleurs facile de trouver directement cette nouvelle formule, qui sera d'un grand usage. En effet, les distances entre les points d'une même droite sont proportionnelles à leurs projections sur l'axe des x, ou à la différence des abscisses de leurs extrémités. Donc, $\frac{AM}{BM} = \frac{a-m}{b-m}$. $\frac{AM}{BM}$ devient $\frac{A'M'}{B'M'}$, a, b, m deviennent $\frac{OA^2}{a}$, $\frac{OA^2}{b}$, $\frac{OA^2}{m}$. Substitnant et réduisant, on trouve la formule (2).

Le rapport anharmonique et la projection harmonique ne sont pas altérés par la transformation.

Soit $\frac{AB}{AC} : \frac{DB}{DC}$. On a par la formule (2) $\frac{A'B'}{A'C'} = \omega \frac{AB}{AC}$ et $\frac{D'B'}{D'C'} = \omega \frac{DB}{DC}$; donc $\frac{AB}{AC} : \frac{DB}{DC} = \frac{A'B'}{A'C'} : \frac{D'B'}{D'C'}$.

Si $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$, on aura aussi $\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{D'B'}{D'C'}$.

Faisceau de quatre droites.— M. Chasles appelle rapport anharmonique de quatre droites issues d'un même point, ou d'un *faisceau* de quatre droites, le rapport des sinus des angles de l'une des droites avec deux des autres, divisé par le rapport des sinus des angles de la quatrième avec ces deux-là.

Le rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites est égal à celui des quatre points d'insertion de ces droites par une transversale quelconque.

Soient A, B, C, D les quatre droites qui se coupent en O, et a, b, c, d les points d'intersection par une transversale quelconque (*fig.* 19). Les sinus des angles d'un triangle étant proportionnels aux côtés opposés, on a par le triangle Oac, en désignant par la notation (A, C) l'angle des deux droites A et C,

$$\frac{\sin (A, C)}{\sin c} = \frac{ac}{aO},$$

et par le triangle Oad,

$$\frac{\sin (A, D)}{\sin d} = \frac{ad}{aO};$$

d'où

$$\frac{\sin (A, C)}{\sin (A, D)} = \frac{ac}{ad} \times \frac{\sin d}{\sin c}.$$

On trouverait de même par les triangles Obc, Obd

$$\frac{\sin(B, C)}{\sin(B, D)} = \frac{bc}{bd} \times \frac{\sin d}{\sin c};$$

par conséquent $\dfrac{\sin(A, C)}{\sin(A, D)} : \dfrac{\sin(B, C)}{\sin(B, D)} = \dfrac{ac}{ad} : \dfrac{bc}{bd}$, *c.q.f.d.*

On voit par là qu'un faisceau de quatre droites donne le même rapport anharmonique sur toutes les transversales, ce qui est d'ailleurs facile à démontrer *à priori* par la transformation. En effet, prenons une des droites D pour axe des y; les trois autres A, B, C se transformeront en trois parallèles A′, B′, C′. a, b, c, d étant les intersections des quatre droites par une transversale, et a', b', c' les intersections des parallèles par la transformée de la transversale, comme le point d se transforme en un point qui passe à l'infini, on aura

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{c'a'}{c'b'};$$

et le second membre étant constant, quelle que soit la transversale, il en est de même du premier.

N. B. On pourrait appeler plus simplement rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites celui des quatre points d'intersection par une transversale; mais la considération des sinus est utile dans beaucoup de cas.

Le rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites n'est pas altéré par la transformation.

Car les transformées forment un faisceau de quatre droites qui coupent la parallèle AB aux mêmes points.

Soient trois droites A, B, M se coupant en O; les transformées A′, B′, M′ se couperont en O′, et la droite OO′ passant par le point de concours E sera à elle-même sa transformée. On aura donc en O et O′ deux faisceaux dont les rapports anharmoniques seront égaux. Par conséquent,

$$\frac{\sin(A, M)}{\sin(B, M)} : \frac{\sin(A, OE)}{\sin(B, OE)} = \frac{\sin(A', M')}{\sin(B', M')} : \frac{\sin(A', O'E)}{\sin(B', O'E)},$$

ou

$$\frac{\sin(A, M)}{\sin(B, M)} = \lambda . \frac{\sin(A', M')}{\sin(B', M')}. \qquad (3)$$

La constante λ est indépendante de la direction de la troisième droite M, dont on prend les angles avec les deux autres A, B.

Les distances d'un point quelconque de M à A et B sont proportionnelles à sin (A, M) et sin (B, M). Appelons p, q ces distances, et p', q' les distances du point correspondant de la droite M′ à A′ et B′; la formule (3) deviendra

$$\frac{p}{q} = \lambda \frac{p'}{q'}. \tag{4}$$

Voici quelques applications de ces formules.

Trois points également distants sur une droite sont en proportion anharmonique avec le point de la droite situé à l'infini. Donc :

Trois points également distants sur une droite indiquent quatre points en proportion harmonique sur la transformée de la droite. Le quatrième point est l'intersection de la transformée avec la droite prise pour axe des y, comme il serait d'ailleurs facile de le démontrer directement.

Par conséquent, sachant que les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point, la transformation apprend que ce théorème n'est qu'un cas particulier du suivant :

Si dans le plan d'un triangle on a une transversale quelconque, et que l'on prenne sur chaque côté le conjugué harmonique des points de rencontre de la transversale, par rapport aux deux sommets du triangle; en joignant chacun des points ainsi obtenus au sommet opposé, il en résultera trois droites qui se couperont en un même point.

Un triangle ABC peut se transformer en un autre A′B′C′, de manière qu'un point quelconque P de son plan devienne le centre de gravité P′, ou le point où se coupent les médianes, du nouveau triangle.

Joignons AP, qui coupe le côté opposé BC, en a, et soit a' le conjugué harmonique de a sur BC; joignons BP qui coupe le côté AC en b, et soit b' le conjugué harmonique de b sur AC; en prenant la droite $a'b'$ pour axe des y, les lignes PA, PB deviendront deux médianes du nouveau triangle A′B′C′; par conséquent CP deviendra la troisième médiane, et le point P se transformera en P′, centre de gravité du nouveau triangle.

N. B. Le point c, où CP coupe le côté AB, aura pour conjugué harmonique, sur AB, un point c' en ligne droite avec a', b'; le triangle abc

inscrit au triangle ABC lui sera homologique, et toutes les lignes de la figure présenteront quatre points en proportion harmonique.

Trois points d'une droite sont en rapport anharmonique avec le point de la droite situé à l'infini, et ce rapport anharmonique est égal au rapport simple des distances de l'un des trois points aux deux autres.

Donc : *Un rapport simple entre les distances de trois points d'une droite indique un rapport anharmonique égal de quatre points sur la transformée de la droite.* Le quatrième point est l'intersection de la transformée avec la droite prise pour axe des y.

Ce principe permet de généraliser la théorie des lignes proportionnelles.

En effet, soient ab et $a'b'$ deux droites divisées en parties proportionnelles, et m, m' deux points correspondants des deux divisions, ou tels que

$$\frac{am}{bm} = \frac{a'm'}{b'm'}.$$

En transformant la figure, a, b, m deviendront A, B, M, et a', b', m' deviendront A′, B′, M′. C et C′ étant les points où les nouvelles droites AB et A′B′ coupent celle que l'on prend pour axe des y, on aura

$$\frac{am}{bm} = \frac{AM}{BM} : \frac{AC}{BC} \qquad \frac{a'm'}{b'm'} = \frac{A'M'}{B'M'} : \frac{A'C'}{B'C'}.$$

Or, $\dfrac{am}{bm} = \dfrac{a'm'}{b'm'}$; donc, $\dfrac{AM}{BM} : \dfrac{AC}{B.C} = \dfrac{A'M'}{B'M'} : \dfrac{A'C'}{B'C'}$.

Ainsi : *Deux droites divisées proportionnellement se transforment en deux autres droites divisées de manière que le rapport anharmonique de quatre points quelconques de l'une soit égal à celui des quatre points correspondants de l'autre.*

M. Chasles a appelé *divisions homographiques* celles qui satisfont à cette condition, et on voit que pour les déterminer il faut se donner trois points A, B, C de l'une de ces divisions, et les trois points A′, B′, C′, qui leur correspondent dans l'autre.

Par conséquent : *Deux droites divisées proportionnellement se transforment en deux autres droites divisées homographiquement.*

Réciproquement : *Deux droites divisées homographiquement se transforment en deux droites divisées proportionnellement, en prenant pour* *axe des y la ligne qui passe par deux points correspondants des deux divisions homographiques.*

Car, soit $\frac{\text{AM}}{\text{BM}} : \frac{\text{AC}}{\text{BC}} = \frac{\text{A}'\text{M}'}{\text{B}'\text{M}'} : \frac{\text{A}'\text{C}'}{\text{B}'\text{C}'}$, et prenons pour axe des y la droite passant par les points C et C'. Ces points se transformeront en deux autres, à l'infini, et on aura $\frac{am}{bm} = \frac{a'm'}{b'm'}$, *c.q.f.d.*

On voit par là que la *similitude* n'est qu'un cas particulier de l'***homographie***, que la géométrie ordinaire ne soupçonnait pas.

Soient A, B, C... n points ayant pour coordonnées a, a'; b, b'; c, c';... on appelle *centre des moyennes distances* un point ayant pour coordonnées x, y, tels que $nx = a + b + c + \ldots\ldots$ ou $nx = \Sigma a$, et que $ny = a' + b' + c' + \ldots\ldots$ ou $ny = \Sigma a'$.

Le centre de moyenne distance de deux points A, B *est le milieu de la droite qui les joint ;* car $2x = a + b$, et $2y = a' + b'$. Ce milieu se transforme en un point conjugué harmonique sur A'B' du point où cette droite coupe l'axe des y, tel que $\frac{2}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ et $\frac{2}{y} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'}$.

Le centre des moyennes distances de n points A, B, C... se transforme en un point tel que $\frac{n}{x} = \Sigma \frac{1}{a}$ et $\frac{n}{y} = \Sigma \frac{1}{b}$ appelé par Poncelet *centre des moyennes harmoniques*. Le centre des moyennes distances est indépendant de la droite que l'on prend pour axe des y ; mais le centre des moyennes harmoniques varie avec la position de cette droite, que Poncelet appelle *axe des moyennes harmoniques*.

Donc : *Le centre des moyennes distances de plusieurs points situés sur la même droite se transforme en centre des moyennes harmoniques des points correspondants de la nouvelle droite.*

Par exemple, de ce théorème de Newton :

Si, sur chacune des sécantes parallèles d'une courbe d'un degré quelconque, on prend le centre des moyennes distances des intersections de la sécante avec la courbe, le lieu de ces centres sera une ligne droite.

On est en droit de conclure cet autre théorème de Cotes :

Si, sur chacune des sécantes issues d'un même point à une courbe de degré quelconque, on prend le centre des moyennes harmoniques des *intersections de la sécante avec la courbe, le lieu de ces centres sera une ligne droite.*

Pour une conique, le théorème de Cotes résulte de ce que *les milieux de toutes les cordes parallèles d'un cercle sont en ligne droite.*

Donc : *Une conique se reproduit en prenant pour point de concours un point quelconque, et pour parallèle le lieu du conjugué harmonique de ce point sur toutes les cordes de la conique qui passent par ce point.*

On verra que ce lieu est la *polaire* du point. Si le point est extérieur à la conique, la polaire devient la corde de contact de ce point. Si le point est à l'infini, la polaire passe par les milieux d'un système de cordes parallèles de la conique ; et comme la conique peut se transformer en un cercle :

Un cercle ou une conique se reproduisent en prenant pour point de concours un point quelconque extérieur, et pour parallèle la corde de contact de ce point.

On conçoit la facilité qui en résultera pour les démonstrations.

20. Nous terminerons par l'étude des propriétés métriques de deux figures homologiques quelconques.

Si l'on prend sur deux droites correspondantes RS *et* R'S' *de deux figures homologiques (fig.* 7) *les points* I *et* J', *dont les homologues sont à l'infini, le produit des distances de deux points homologues quelconques* M, M' *de ces deux droites aux points* I *et* J' *respectivement, sera constant.* (*G. S.*, 510.)

Car par les triangles semblables EMI, EM'J'

$$\frac{\text{MI}}{\text{EI}} = \frac{\text{EJ}'}{\text{M}'\text{J}'} \text{ ; d'où } \text{MI} \times \text{M}'\text{J}' = \text{EI} \times \text{EJ}' = \text{const.}$$

Le produit des distances de deux points homologues M, M' *aux deux droites* Oy *et* JJ' *de chaque figure qui correspondent à l'infini de l'autre, est constant.* (*G. S.*, 514.)

Ces distances sont égales à OP et à $\text{P}'\text{J}' = \text{P}'\text{A} + \text{AJ}' = \text{CM}' + \text{OE}$.

$\text{CM}' = \frac{\text{OE} \times \text{PA}}{\text{OP}}$; donc $\text{OP} \times \text{P}'\text{J}' = \text{OE} \times \text{PA} + \text{OE} \times \text{OP}$, ou $\text{OP} \times \text{P}'\text{J}' = \text{OE} \times \text{OA} = \text{const.}$

De là résulte cette nouvelle définition des figures homologiques :

Étant données deux droites parallèles Oy *et* IJ *dans le plan d'une figure, si d'un point fixe* E *on mène un rayon à chaque point de la figure et qu'on prenne sur ce rayon un point* m *tel que le produit des distances des deux points* m, m' *aux deux parallèles soit constant, le point* m' *décrira une figure homologique.* (G. S. 530.)

Le rapport des distances de deux points fixes a, b *d'une figure à une droite* L, *est au rapport des distances des deux points fixes correspondants* a', b', *à la droite correspondante* L', *dans une raison constante.*

Car L et L' coupent les droites ab, $a'b'$ en deux points correspondants m, m', et on a par la formule (2)

$$\frac{am}{bm} = \lambda \, \frac{a'm'}{b'm'} .$$

am et bm sont proportionnelles aux distances de la droite L aux points a et b, et $a'm'$, $b'm'$ sont proportionnelles aux distances de la droite L' aux points a', b', d'où résulte la proposition énoncée.

Le rapport des distances d'un point quelconque m *de l'une des figures à deux droites fixes* A, B, *est au rapport des distances du point correspondant* m' *aux deux droites correspondantes* A', B' *dans une raison constante.* (G. S. 512.)

Car A, B et A', B' se coupant en deux points correspondants d, d', joignons dm, $d'm'$, et désignons ces droites par M, M'; on aura par la formule (3)

$$\frac{\sin \, A, M}{\sin \, B, M} = \lambda \, \frac{\sin \, A', M'}{\sin \, (B', M')} .$$

Ou bien p, q étant les distances des droites A, B au point m, et p', q' celles des droites A', B' au point m', on a par la formule (4)

$$\frac{p}{q} = \lambda \, \frac{p'}{q'} .$$

Le rapport des distances de deux points correspondants m, m' *à deux droites correspondantes* A, A', *est au rapport des distances de ces points au point de concours* E *(centre homologique) dans une raison constante.*

Car une droite quelconque passant par le point de concours E coupe A, A' en deux points correspondants d, d', et cette droite étant a elle-même sa transformée, les distances des points m, m' à cette droite sont proportionnelles à Em, Em'; on a donc, par le théorème précédent, en appelant p, p' les distances des points m, m' à A, A'

$$\frac{p}{p'} = \lambda \frac{Em}{Em'}.$$

N. B. *Lorsque l'un ou deux des points fixes, ou l'une ou deux droites fixes passent à l'infini, cela revient à supposer égaux à l'unité les segments qui deviennent infinis ou les distances qui deviennent infinies.*

Soit $\frac{am}{bm} = \lambda \frac{a'm'}{b'm'}$; la constante λ se détermine en se donnant une position particulière c du point m, et c' étant la position correspondante de m', on a $\lambda = \frac{ac}{bc} \times \frac{b'c'}{a'c'}$. Si le point b' passe à l'infini, le segment $b'm'$ devient infini, mais disparaît à cause du segment $b'c'$ de la constante, qui devient aussi infini, et l'on a

$$\frac{am}{bm} = \lambda a'm',$$

ce qui revient à faire $b'm' = 1$ dans la formule.

On a maintenant

$$\lambda = \frac{ac}{bc \times a'c'}.$$

Si le point a passe à l'infini, am devient infini, mais disparaît à cause du facteur ac de la constante, qui devient aussi infini, et

$$\frac{1}{bm} = \lambda a'm',$$

ce qui revient à faire $am = 1$ dans la formule.

N. B. b et a' sont les points I et J' de chacune des deux droites qui correspondent à l'infini de l'autre, et $bm \times a'm$ est constant, comme nous l'avions déjà démontré.

On discuterait de même la formule

$$\frac{\sin(A, M)}{\sin(B, M)} = \lambda \frac{\sin(A', M')}{\sin(B', M')},$$

ou

$$\frac{p}{q} = \lambda \frac{p'}{q'}.$$

Par exemple, si la droite B passe à l'infini, on a $p = \lambda \frac{p'}{q'}$. D'où résulte ce théorème, d'ailleurs facile à démontrer directement :

La distance de chaque point d'une figure à une droite fixe A est au rapport des distances du point correspondant de l'autre figure aux droites A', B' qui correspondent à A et à l'infini de la première figure, dans une raison constante. (*G. S.* 515.)

On discuterait de même la formule $\frac{p'}{p} = \lambda \frac{Em}{Em'}$; car si une des droites A coïncide avec la parallèle à l'axe d'homologie, A' se correspond à elle-même, et F étant le point où Em coupe la parallèle, on retrouve le rapport anharmonique $\frac{Em}{Em'} = \lambda \frac{Fm}{Fm'}$.

Si l'on suppose l'axe d'homologie à l'infini, $\frac{Fm}{Fm'} = 1$, et $\frac{Em}{Em'} = \lambda$. Alors les deux figures sont semblables et ont le point E pour centre de similitude.

Si E est à l'infini, $\frac{Em}{Em'} = 1$, et $\frac{p'}{p}$ étant constant, chacune des figures se déduira de l'autre par l'accroissement des coordonnées, par rapport à l'axe d'homologie.

Si la droite A passe à l'infini, A' deviendra la droite JJ', et $Em = \lambda \frac{Em'}{p}$. De même, si A' passe à l'infini, A devient la droite Oy, et $Em' = \lambda \frac{Em}{p}$: d'où l'on voit que si l'un des points décrit un cercle, l'autre décrira une conique, comme nous l'avions déjà démontré.

EXPOSÉ ANALYTIQUE DE LA MÉTHODE.

Tout mode de transformation des figures planes revient à se donner deux relations quelconques entre les coordonnées d'un point x, y d'une figure et les coordonnées d'un point correspondant x', y' de la nouvelle figure. $F(x, y) = 0$ étant la courbe que décrit le point x, y, on aura celle que décrit le point x', y' en éliminant x, y au moyen des deux relations. On peut d'ailleurs supposer les deux figures rapportées aux mêmes axes ou à des axes différents.

Le cas le plus simple est celui où l'on se donne des relations algébriques et du premier degré en x, y, x', y'.

En prenant les relations

$$x = \frac{ay' + bx' + c}{a''y' + b''x' + c''} \qquad y = \frac{a'y' + b'x' + c'}{a''y' + b''x' + c''}$$

Waring généralisa la transformation du lemme XXII des principes de Newton, et en rapportant les deux figures de ce lemme aux mêmes axes, on trouve les relations plus simples de la page 15, qui prouvent que les deux figures sont homologiques.

En effet, la droite $Y - y = \frac{y - y'}{x - x'}(X - x)$ qui joint deux points correspondants, donne sur l'axe des Y un segment constant $X = - d$.

Une droite quelconque $Y = mX + y$ se transforme en une autre dont le coefficient angulaire est $\frac{y}{d}$; et comme pour $X = k$, on a $Y' = Y$, la droite et sa transformée se coupent sur la parallèle $X = k$ à l'axe des y. Par conséquent : le centre d'homologie est le point E sur l'axe des X tel que $OE = - d$, et l'axe d'homologie est une parallèle à l'axe des Y à la distance $OA = k$.

M, M' étant deux points correspondants, la droite MM' passe par le point E, et $\frac{EM'}{EM} = \frac{x' + d}{x + d} = \frac{k}{x}$. F étant le point où MM' coupe l'axe d'homologie, $\frac{FM'}{FM} = \frac{x' - k}{k - x} = \frac{d}{x}$; d'où $\frac{EM'}{EM} : \frac{FM'}{FM} = \frac{k}{d}$, ce qui prouve la constance du rapport anharmonique des quatre points E, F, M, M'.

Pour toute autre distance k' de la parallèle à l'axe des y, M se transformerait en M'', tel que $\frac{EM''}{EM} = \frac{k'}{x}$; donc $\frac{EM'}{EM''} = \frac{k}{k'}$; d'où résulte la similitude des transformées.

Par conséquent, il suffit d'opérer la transformation pour le cas le plus simple où $d = k$. Alors les points M, M' étant conjugués harmoniques sur EF, se reproduisent réciproquement.

Voilà pourquoi nous avions appelé transformation *Newtonienne* celle qui résulte de ces formules.

Une droite $y = mx + y$ se transforme en une nouvelle droite

$$y = \frac{g}{k}x + mk.$$

g restant constant, toutes les transformées sont parallèles. m restant constant, toutes les transformées se coupent au même point sur l'axe des y. La droite $y = m(x + k)$ qui passe par le point de concours se reproduit.

Transformation des distances. — Soit D la distance de deux points a, b; a', b' de la droite $y = mx + g$. On aura $D^2 = (1 + m^2)(a - a')^2$. a et a' deviennent $\frac{k^2}{a}$ et $\frac{k^2}{a'}$, et m devient $\frac{g}{k}$. D' étant la distance transformée

$$D'^2 = \frac{k^2(k^2 + g^2)}{1 + m^2}\frac{(a - a')^2}{a^2a'^2};$$

et comme $(a - a')^2 = \frac{D^2}{1 + m^2}$ on a $D' = \lambda\frac{D}{aa'}$.

Transformation des angles. — Soient deux droites $y = mx + g$, $y = m'x + g'$. Les transformées auront pour coefficients angulaires $\frac{g}{k}$, $\frac{g'}{k}$ et α étant l'angle de ces transformées

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{g - g'}{k^2 + gg'}$$

d'où l'on voit qu'on peut déterminer k de manière que les transformées se coupent sous un angle donné. L'angle sera droit si $gg' = -k^2$.

Transformation du cercle. — Le cercle $y^2 + x^2 + Ay + Bx + C = 0$ se transforme en une conique $k^2y^2 + Akxy + Cx^2 + Bk^2x + k^4 = 0$ caractérisée par $A^2 - 4C$. Les intersections du cercle avec l'axe des y sont les racines de l'équation $y^2 + Ay + C = 0$. Ainsi, la transformée sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que l'axe des y sera extérieur au cercle, sécant ou tangent. Le cercle se reproduit si $A = 0$, et si $k^2 = C$, ce qui exige que l'axe des y soit extérieur. C est le carré de la longueur de la tangente au cercle par l'origine; par conséquent k est égal à cette tangente.

La corde de contact du point de concours E, pour lequel $y = 0$, $x = -k$ étant $x = k$, *le cercle se reproduit en prenant pour point* *de concours un point quelconque extérieur, et pour parallèle la corde de contact de ce point.*

Transformation des coniques. — Une conique

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

se transforme en une autre conique

$$Ak^2y^2 + Dkxy + Fx^2 + Bk^3y + Ek^2x + Ck^4 = 0$$

caractérisée par $D^2 - 4AF$. La première conique coupe l'axe des y en deux points donnés par les racines de

$$Ay^2 + Dy + F = 0$$

qui sont imaginaires, réelles et inégales, ou réelles et égales, suivant qu'on a

$$D^2 - 4AF < 0, \quad D^2 - 4AF > 0, \quad D^2 - 4AF = 0.$$

Ainsi : *Une conique quelconque peut produire une ellipse, une hyperbole ou une parabole.*

La conique se reproduit si l'on a $Bk = D$, $F = Ck^2$.

Une conique quelconque peut se transformer en un cercle.

Pour que la transformée soit un cercle, il faut d'abord que le terme en xy disparaisse, ou que $D = 0$, ce qui exige que le diamètre de la conique

$$2Ay + Bx + D = 0$$

conjugué de l'axe des y, passe par l'origine. Il faut de plus que les coefficients des carrés des variables soient égaux, ou que $Ak^2 = F$, ce qui exige que F et A soient de même signe. Les intersections de la conique proposée avec l'axe des y sont données par $Ay^2 + F = 0$, qui a ses racines imaginaires ; donc l'axe des y doit être extérieur à la conique. On voit que cet axe est une corde idéale dont la moitié est égale à k.

Donc : *Une conique quelconque se transforme en un cercle, si l'on prend pour axe des y une corde idéale, pour origine le milieu de la corde, et pour distance de la parallèle la moitié de cette corde.*

On peut éviter la considération de la corde idéale. La polaire d'un point quelconque $0, b$ de l'axe des y est

$$2Aby + (Bb + E)x + 2F = 0,$$

et on a pour le segment b' que la polaire intercepte sur cet axe, $b' = -\frac{F}{Ab}$; d'où $bb' = -\frac{F}{A}$, et k est moyenne proportionnelle entre les deux segments b, b', situés de divers côtés de l'origine, lorsque la corde est idéale.

§ IV. Théorie des transversales.

21. Lemme. — *Si on prend sur chacun des côtés d'un polygone un point qui détermine deux segments, additifs ou soustractifs, le produit de tous les segments non contigus divisé par le produit de tous les autres donnera le même rapport, de quelque manière que l'on transforme la figure.*

Soit ABCDE... le polygone, a, b, c, d, e... les abscisses des sommets, et M, N, P, Q... les points pris sur les côtés. Désignons par les mêmes lettres accentuées les points correspondants du nouveau polygone ; on aura par la formule 2 $\frac{A'M'}{B'M'} = \frac{AM}{BM} \times \frac{b}{a}$; $\frac{B'N'}{C'N'} = \frac{BN}{CN} \times \frac{c}{b}$ etc. Multipliant et réduisant, les abscisses disparaîtront, et il en résultera la proposition énoncée.

22. *Théorème de* Carnot. — *Lorsqu'une transversale rectiligne coupe les côtés d'un polygone, le produit de tous les segments non contigus est égal au produit de tous les autres.*

En prenant la transversale pour axe des y, les segments transformés A'M', B'M'... deviennent tous indéfinis ; $\frac{A'M'}{B'M'} = 1$, $\frac{B'N'}{C'N'} = 1$... ; donc

$$\frac{AM}{BM} \times \frac{BN}{CN} \times \frac{CP}{DP} \times \ldots = 1,$$

que nous représenterons par la notation $\left(\frac{AM}{BM}\right) = 1$, et il en résulte la proposition énoncée.

Si une nouvelle transversale coupe les côtés du même polygone en m, n, p, ... on aura aussi $\left(\frac{Am}{Bm}\right) = 1$; donc $\left(\frac{AM.Am}{BM.Bm}\right) = 1$.

Il en serait de même, quel que fût le nombre des transversales; par conséquent le théorème s'étend à un polygone dont les côtés sont coupés par ceux d'un autre polygone, et il subsiste en remplaçant le premier polygone par une courbe de degré quelconque. (Carnot ; *Géom. de position.*)

On le démontre facilement pour le cercle, en partant des propriétés connues des cordes ou des sécantes qui se coupent au même point. Donc il est vrai pour une conique quelconque.

Lorsqu'un polygone est circonscrit à une conique, le point de contact détermine deux segments sur chaque côté, et le produit de tous les segments non contigus est égal à celui de tous les autres.

Il suffit de le démontrer pour le cas du cercle, et le théorème est alors évident à cause de l'égalité des tangentes au cercle par le même point.

Le théorème de Carnot s'étend à un polygone *gauche*, ou dont les côtés ne sont pas dans un même plan, qui serait coupé par un plan transversal. Car, en projetant le polygone gauche sur un plan quelconque par des parallèles au plan transversal, on obtient un polygone plan coupé par une transversale rectiligne, et les segments déterminés par la transversale sur chaque côté sont proportionnels à ceux que le plan transversal détermine sur les côtés du polygone gauche.

Cas du triangle. — Prenant pour origine le point où la transversale coupe l'un des côtés, la relation segmentaire, d'ailleurs facile à démontrer directement, devient une conséquence de ce théorème : *La parallèle à un des côtés d'un triangle coupe les deux autres en parties proportionnelles.*

La réciproque est vraie et se démontre facilement. Elle sert à prouver que trois points d'une figure sont en ligne droite.

Trois droites menées d'un point D *aux trois sommets d'un triangle* ABC *coupent les côtés opposés en trois points* a, b, c, *tel que le produit de trois segments non contigus est égal au produit des trois autres.*

Évident par la transformation du triangle en un autre, A'B'C', tel que D' soit le point où se coupent les médianes du nouveau triangle. D'ailleurs facile à démontrer directement, ainsi que la réciproque, qui sert à prouver que trois droites d'une figure se coupent au même point.

Par exemple : *Dans un triangle circonscrit à une conique, les droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés le coupent au même point.*

Car on vient de voir que la relation segmentaire a lieu.

Soit un triangle ABC (*fig.* 20) et a, a'; b, b'; c, c' les points où les côtés sont coupés par une conique. On aura la relation segmentaire

$$\frac{Ab.Ab'}{Ac.Ac'} \times \frac{Bc.Bc'}{Ba.Ba'} \times \frac{Ca.Ca'}{Cb.Cb'} = 1$$

qui servira à trouver un des segments, Ac' par exemple, si l'on connaît tous les autres. Car $\frac{Ab.Ab'}{Ac.Ac'} = \frac{m}{Ac}$, m étant une quatrième proportionnelle aux trois lignes connues Ac, Ab, Ab'. De même $\frac{Bc.Bc'}{Ba.Ba'} = \frac{Bc'}{n}$, et $\frac{Ca.Ca'}{Cb.Cb'} = \frac{p}{Cb'}$. Donc $\frac{m}{Ac} \times \frac{Bc}{n} \times \frac{p}{Cb'} = 1$, d'où $Ac' = \frac{m.p.Bc'}{n.Cb'}$. Posant $\frac{m.p}{Cb'} = r$, $Ac' = \frac{r.Bc'}{n}$. Or $Bc' = Ac' - AB$, et $Ac' = \frac{r.AB}{r-n}$ quatrième proportionnelle à trois droites connues.

23. *Cinq points déterminent une conique.*—Soient a, b, b', c, c' les cinq points. Les droites bb', cc' et une transversale quelconque passant par a formeront un triangle ABC, et on trouvera, comme nous venons de l'indiquer, le segment Ca' qui déterminera un sixième point de la conique qui passerait par les cinq points donnés.

Nous allons voir qu'on peut trouver un nouveau point de la conique par de simples intersections de droites, ou en ne faisant usage que de la *règle*.

Hexagone inscrit à deux droites ou à une conique. — Soit $ab'ca'bc'a$ un hexagone quelconque inscrit à deux droites ou à une conique (*fig.* 21). Les côtés de rang pair $b'c$, $a'b$, ac' forment un triangle RST qui coupé par les deux droites ou par une conique donne

$$\frac{Ra'.Rb}{Ta'.Tb} \times \frac{Sa.Sc'}{Ra.Rc'} \times \frac{Tc.Tb'}{Sc.Sb'} = 1.$$

Les côtés de rang impair sont des transversales de ce triangle, et M, N, P étant les points où ils coupent les côtés des rangs pairs, on a aussi

$$\frac{Ra'.Rb.RM}{Ta'.Tb.TM} \times \frac{Sa.Sc'.SN}{Ra.Rc'.RN} \times \frac{Tc.Tb' \times TP}{Sc.Sb'.SP} = 1$$

qui par suite de l'égalité précédente se réduit à

$$RM.SN.TP = TM.RN.SP$$

et cette relation segmentaire prouve que les trois points M, N, P sont en ligne droite. (*Prop. proj.*, tom. II.)

Ainsi : *Dans tout hexagone inscrit à une conique ou à deux droites, les côtés opposés se coupent en trois points situés sur la même droite.*

Cela posé, soient A, B, C, D, E cinq points donnés (*fig.* 22). En joignant ces points deux à deux, on pourra considérer, par exemple, AB, BC, CD, DE comme les quatre premiers côtés d'un hexagone inscrit à une conique. Les côtés opposés AB, DE se coupant en I, menons par ce point une transversale quelconque qui rencontre BC en K et CD en L ; K et L seront les intersections des deux autres couples de côtés opposés de l'hexagone, et EK AL se couperont en un nouveau point F de la conique.

24. *Théorème de* Newton.—Revenons au triangle dont les côtés sont coupés par une conique. Si l'un des sommets B du triangle passe à l'infini, ou si les deux côtés de l'angle B sont parallèles, la relation segmentaire se réduit à $\frac{Ab.Ab'}{Ac.Ac'} = \frac{Cb.Cb'}{Ca.Ca'}$ (*fig.* 23).

Par un point quelconque D de la droite aa' menons une parallèle à AC qui coupe la courbe en e, e' ; on aura de même $\frac{Cb.Cb'}{Ca.Ca'} = \frac{De.De'}{Da.Da'}$, et par suite

$$\frac{Ab.Ab'}{Ac.Ac'} = \frac{De.De'}{Da.Da'}$$

d'où résulte ce théorème de Newton :

Si par un point D *on mène des parallèles à deux droites fixes* Ab', Ac' *qui se coupent dans le plan d'une conique, le rapport des produits des segments interceptés par la courbe sur ces parallèles, à partir du point* D, *sera constant, quelle que soit la position de ce point.*

25. *Cercle osculateur des coniques.* — Supposons trois points, b, c, b' d'une conique infiniment voisins (*fig.* 20), et trois autres points quelconques a, a', c' de la courbe. Le triangle ABC, dont les côtés sont les cordes aa', bb' et cc', donne

$$\frac{Ab.Ab'}{Ac.Ac'} \times \frac{Bc.Bc'}{Ba.Ba'} \times \frac{Ca.Ca'}{Cb.Cb'} = 1.$$

Concevons un cercle passant par les trois points voisins b, c, b' et coupant le côté AB du triangle en ρ, on aura $A\rho \cdot Ac = Ab \cdot Ab'$, et par suite

$$A\rho = Ac' \times \frac{Ba \cdot Ba'}{Bc \cdot Bc'} \times \frac{Cb \cdot Cb'}{Ca \cdot Ca'},$$

ce qui détermine $A\rho$, quelle que soit la position des trois points b, c, b'. Lorsque ces trois points se confondent, le sommet A du triangle coïncide avec c, la corde bb' devient la tangente en A, et

$$A\rho = Ac' \times \frac{Ba \cdot Ba'}{BA \cdot Bc'} \times \frac{CA^2}{Ca \cdot Ca'}.$$

Le point ρ ainsi déterminé appartient à un cercle tangent à la conique en A, et que l'on appelle cercle *osculateur* en ce point.

Cette élégante application de la théorie des transversales est due à M. Chasles.

§ V. Faisceau harmonique.

26. Lemme. — *Trois droites issues du même point se transforment en trois parallèles équidistantes.*

Soient trois droites issues du point O (*fig.* 24) coupées en A, B, C par une transversale, et D le conjugué harmonique de B sur AC; joignons OD, et prenons cette droite pour axe des y; OA, OB, OC se transformeront en trois parallèles coupées par la transformée de la transversale en A′, B′ C′, de manière que A′B′ = B′C′; donc les trois parallèles seront équidistantes.

A toute autre transversale coupant les trois droites en M, N, P et l'axe des y en Q, correspondra une autre transversale coupant les parallèles équidistantes en M′, N′, P′, et N′ étant le milieu de M′ P′, le point N sera conjugué harmonique de Q sur MP; par conséquent :

Trois droites issues d'un même point forment avec une quatrième droite issue du même point un faisceau qui coupe harmoniquement une transversale quelconque.

A cause de cette propriété, on a donné le nom de faisceau *harmonique* à l'ensemble des quatre droites, qui sont dites les *rayons* du faisceau; le point où elles se coupent est appelé l'*origine*, ou le *centre* du faisceau.

N. B. Les rayons d'un faisceau harmonique peuvent être parallèles, ce qui revient à supposer le centre à l'infini.

27. *Quatre droites issues d'un même point forment un faisceau harmonique, s'il existe une transversale qui les coupe harmoniquement.*

Car en prenant une des droites pour axe des y, les trois autres se transformeraient en trois parallèles équidistantes; donc les quatre droites coupent harmoniquement toute autre transversale.

28. *Une parallèle à un des rayons d'un faisceau harmonique est divisée en parties égales par les trois autres.*

La parallèle est coupée harmoniquement par les quatre rayons, et l'un des points étant l'infini, les trois autres sont équidistants.

29. Réciproquement : *Quatre droites issues d'un même point forment un faisceau harmonique si une parallèle à l'une d'elles est divisée en parties égales par les trois autres.*

Car les trois points d'intersection sur la parallèle sont en proportion harmonique avec le point à l'infini.

30. *Deux droites forment un faisceau harmonique avec les bissectrices de leurs angles.*

Une parallèle à l'une des bissectrices forme avec l'autre bissectrice et les deux droites deux triangles rectangles égaux, ce qui prouve que la parallèle est divisée en deux parties égales.

31. Réciproquement: *Si deux rayons d'un faisceau harmonique sont rectangulaires, ils divisent en parties égales les angles des deux autres rayons.*

Une parallèle à l'un des rayons rectangulaires est divisée en parties égales par les trois autres rayons, et on a deux triangles rectangles dont l'égalité prouve que les rayons rectangulaires divisent en parties égales les angles des deux autres.

32. *Deux côtés opposés d'un quadrilatère complet forment un faisceau harmonique avec la troisième diagonale et la droite qui joint l'intersection de ces côtés avec celle des deux autres diagonales.*

Évident par la transformation du quadrilatère complet en parallélogramme, et il résulte cette conséquence :

Chacune des diagonales d'un quadrilatère complet est coupée harmoniquement par les deux autres.

33. *Trouver le conjugué harmonique d'un point C sur une droite AB, en ne faisant usage que de la règle.*

Formons un quadrilatère complet dont deux côtés opposés se coupent en A, les deux autres en B, et dont une diagonale passe par C; l'autre diagonale coupera AB en un point D, conjugué harmonique de C.

Cette construction peut s'effectuer sur le terrain par la méthode des *alignements* et donne une solution de ce problème :

Trouver la distance d'un point à un point inaccessible.

§ VI. Pôle et polaire par rapport a deux droites.

34. Lemme. — *Deux droites coupées par des transversales issues d'un même point se transforment en deux parallèles coupées par des transversales parallèles.*

On prendra l'axe des y passant par le point et par l'intersection des deux droites.

Le milieu de la partie interceptée par les deux parallèles sur chacune des transversales parallèles est sur la parallèle équidistante ; donc :

Lorsqu'une transversale tourne autour d'un point P, *le conjugué harmonique* Q *de ce point, par rapport aux intersections de la transversale avec deux droites, reste sur une troisième droite qui passe par l'intersection des deux autres.*

A cause de cette propriété, le point P est dit le *pôle* de la droite que décrit le point Q, et cette droite est dite la *polaire* du point P.

Les diagonales de tous les parallélogrammes formés par les deux parallèles, avec deux quelconques des transversales parallèles, se coupent sur la parallèle équidistante. Donc :

35. *Une transversale tournant autour d'un point* P *détermine sur deux droites des divisions telles que les lignes qui joignent deux points quel-*

conques de l'une des divisions aux points correspondants de l'autre, pris inversement, se coupent sur la polaire du point par rapport aux deux droites.

Par conséquent, la construction de la polaire n'exige que l'emploi de la *règle.*

N. B. La droite qui joint le pôle à l'intersection des deux droites forme un faisceau harmonique avec ces deux droites et la polaire, ce qui ramène la théorie du pôle et de la polaire à celle du faisceau harmonique, et réciproquement.

36. *Les polaires d'un même point* P *par rapport à chacun des angles d'un triangle* ABC *coupent les côtés opposés en trois points situés sur la même droite.*

La polaire d'un point par rapport à chacun des angles du triangle est conjuguée harmonique de la droite qui joint le point au sommet par rapport aux deux côtés de l'angle. Or, nous avons vu que le triangle ABC peut se transformer en un autre A′B′C′, de manière que le point P′ soit l'intersection des médianes. Les polaires du point P′ par rapport aux angles du nouveau triangle A′B′C′ seront les parallèles par les sommets aux côtés opposés, ce qui rend la proposition énoncée évidente.

Si le point P passe à l'infini, suivant une direction quelconque, PA, PB, PC devienent parallèles à cette direction, et on a ce nouveau théorème :

Une transversale étant donnée dans le plan d'un triangle, les droites qui vont des sommets au milieu des segments que chaque angle intercepte sur la transversale rencontrent les côtés opposés en trois points situés sur la même droite.

Ces droites sont les polaires du point à l'infini sur la transversale.

Les polaires d'un point par rapport à deux angles d'un triangle se coupent sur la droite qui joint ce point au sommet du troisième angle.

Résulte de ce que les parallèles à deux côtés d'un triangle par les sommets opposés se coupent sur la médiane qui passe par le troisième sommet.

Les bissectrices des angles extérieurs d'un triangle rencontrent les côtés opposés en trois points situés sur la même droite.

Car ces bissectrices sont les polaires du centre du cercle inscrit par rapport à chacun des angles du triangle.

§ VII. Théorie du rapport anharmonique.

37. Lemme. — *Le rapport anharmonique de quatre points situés sur la même droite, ou d'un faisceau de quatre droites, n'est pas altéré par la transformation* (19).

Nous indiquerons, pour abréger, le rapport anharmonique de quatre points A, B, C, D par la notation (ABCD), les deux dernières lettres désignant les points dont on prend les distances aux deux autres. Ainsi,

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}.$$

38. *Le rapport anharmonique de quatre points n'est pas altéré lorsque l'on permute entre eux deux des points, pourvu que l'on permute aussi les deux autres.*

Par exemple, $(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA.DB}{CB.DA} = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = (CDAB)$.

39. *Lorsque deux séries de trois points*, B, C, D *et* B′, C′, D′ *se correspondent un à un sur les côtés d'un angle et forment le même rapport anharmonique avec le sommet* A, *les trois droites* BB′, CC′, DD′ *se coupent au même point* (*fig.* 25).

Prenons pour point de concours l'intersection E de deux de ces droites BB′, CC′, et pour parallèle la polaire AP du point E par rapport aux côtés de l'angle. Ces deux côtés se transformeront l'un en l'autre, et d étant le point où ED coupe l'autre côté de l'angle, on aura $(ABCD) = (A'B'C'd)$; mais $(ABCD) = (A'B'C'D')$, ce qui exige que d coïncide avec D′. Donc la troisième droite DD′ passe aussi par le point E.

Nous indiquerons le faisceau de quatre droites OA, OB, OC, OD par la notation O(ABCD); et si A, B, C, D sont les intersections de ces droites par une transversale, (ABCD) sera égal au rapport anharmonique du faisceau. Donc :

On n'altère pas le rapport anharmonique d'un faisceau en prenant *toute autre origine, pourvu que les nouveaux rayons coupent une transversale aux mêmes points.*

Par exemple : O (ABCD) = O′(ABCD) = O″(ABCD).

40. *Le rapport anharmonique d'un faisceau n'est pas altéré lorsque l'on permute deux des rayons, pourvu que l'on permute aussi les deux autres.*

Car, puisque (ABCD) = (CDAB), on aura aussi O(ABCD) = O(CDAB).

41. *Lorsque deux faisceaux ont un rayon commun et même rapport anharmonique, les trois autres rayons correspondants le coupent en trois points situés sur la même droite (fig. 26).*

Prenons pour axe des x la direction commune OO′ des deux rayons OC, O′C′, pour parallèle la droite $\alpha\beta$ sur laquelle se coupent deux couples de rayons correspondants OA, OA′ ; OB, OB′, et pour point de concours E, le conjugué harmonique sur OO′ du point γ où $\alpha\beta$ coupe OO′. Les trois rayons OA, OB, OC se transformeront en O′A′, O′B′, O′C′. δ étant le point où OD coupe $\alpha\beta$, et d' le point où la transformée de OD coupe la même ligne, on aura $(\alpha\beta\gamma\delta) = (\alpha\beta\gamma d')$; et comme les deux faisceaux ont le même rapport anharmonique, d' devra coïncider avec δ: par conséquent OD se transformera aussi en O′D′.

Lorsque deux systèmes de quatre points correspondants sur une droite ont un rapport anharmonique égal, tous les autres rapports anharmoniques sont égaux, de quelque manière qu'on les prenne.

Car les deux droites seraient en perspective, si l'on faisait coïncider deux points correspondants.

Lorsque deux faisceaux de quatre droites correspondantes ont un rapport anharmonique égal, tous les autres rapports anharmoniques sont égaux, de quelque manière qu'on les prenne.

Car les deux faisceaux seraient en perspective, si l'on faisait coïncider deux rayons correspondants.

Il est évident que

Deux faisceaux qui ont les mêmes angles ont le même rapport anharmonique.

Donc : *Deux faisceaux qui ont les rayons correspondants respectivement parallèles ou perpendiculaires, ont même rapport anharmonique.*

42. *Le rapport anharmonique n'est pas altéré si on remplace des rayons par leurs prolongements, ou des angles par leurs suppléments.*

Car on aura les mêmes points d'intersection avec une transversale, et d'ailleurs des angles ont le même sinus que leurs suppléments.

43. C'est sur cette théorie si simple du rapport anharmonique qu'est fondée la *Géométrie supérieure* de M. Chasles.

« Aucune autre proposition, dit l'éminent géomètre (*G. S.*, Préf. XXIV), ne me paraît aussi propre que celle de ce rapport à servir de liaison entre les diverses parties d'une figure dont on veut découvrir ou démontrer les propriétés. La proposition la plus généralement employée est celle de la proportionnalité entre les côtés des triangles semblables, mais ces triangles n'existent pas en général dans les données de la question, et il faut chercher à les former par des lignes auxiliaires, tandis que les rapports anharmoniques s'aperçoivent presque toujours dans la figure, ou peuvent s'y former très-aisément. »

En comparant les énoncés des propositions que nous venons de démontrer, on verra que l'on passe d'un énoncé à l'autre en remplaçant les *points* par des *droites*, et les *droites* par des *points*. C'est en cela que consiste le principe de la *dualité*, qui permet de déduire immédiatement de certains théorèmes de nouveaux théorèmes que l'on appelle *corrélatifs*. Le rapport anharmonique se prête avec la même facilité à la démonstration directe de chacune des propositions corrélatives.

Étant pris sur deux droites deux séries de trois points A, B, C *et* A', B', C', *qui se correspondent un à un, les diagonales* AB', BA' ; AC', CA' ; BC', CB' *se couperont en trois points situés sur la même droite* (*fig.* 13).

En effet, A (A'B'C'C) = C (A'B'C'A), car les rayons correspondants des deux faisceaux se coupent sur la même droite. Les intersections de ces faisceaux par les diagonales BA' et BC' donnent (A'MRB) = (SPC'B), et à cause du point B commun, les trois droites A'S, PM, C'R se coupent au même point. Or A'S et C'R se coupent en N ; donc ce point N est sur MP. *c. q. f. d.*

Le principe de la dualité indique ce théorème corrélatif :

Si trois angles A, B, C *sous-tendent une même corde* OO', *pris deux à* *deux, ils en sous-tendront une deuxième, et les trois cordes ainsi obtenues se couperont en un même point* (*fig.* 27).

En effet, O′ (ABCO) coupé par les deux droites OA, OC, donne ($Am'n'O$) $=$ ($npCO$). Donc m ($Am'n'O$) $= p'$ ($npCO$), et à cause des rayons mO, $p'O$ qui coïncident, les autres couples de rayons correspondants, mA, $p'n$; mm', $p'p$; mn', $p'C$ se coupent en trois points situés sur la même droite. Par conséquent, la corde nn' passe par l'intersection I des deux autres mm' et pp'. c. q. f. d.

§ VIII. Divisions homographiques sur deux droites.

44. Lemme. *Deux droites quelconques* L *et* L′ *sont deux transformées d'une troisième droite, déterminée par la condition que trois points* a, b, c *de la première, et trois points* a′, b′, c′ *de la seconde correspondent respectivement aux mêmes points de la troisième* (*fig.* 28).

Joignons ab' et ba' qui se coupent en α, et bc', cb' qui se coupent en γ; $\alpha\gamma$ sera la troisième droite. En effet, si nous prenons b' pour point de concours et la polaire de ce point par rapport à L et $\alpha\gamma$ pour parallèle, la droite $\alpha\gamma$ se transformera en L, de manière que α, β, γ deviennent a, b, c. Si nous prenons b pour point de concours et la polaire de ce point par rapport à L, et $\alpha\gamma$ pour parallèle, la droite $\alpha\gamma$ se transformera en L′, de manière que α, β, γ deviennent a', b', c'.

45. *Trois couples de points* a, a′; b, b′; c, c′ *sur deux droites* L, L′, *déterminent deux divisions homographiques sur ces deux droites, et le tracé de ces divisions n'exige que l'emploi de la règle.*

On construira, comme nous venons de l'indiquer, la troisième droite $\alpha\gamma$, et m étant un point quelconque de L, joignant $b'm$ qui coupe $\alpha\gamma$ en μ, $b\mu$ donnera sur L′ le point correspondant m'. $\frac{am}{bm} = \omega\frac{\alpha\mu}{\beta\mu}$, $\frac{a'm'}{b'm'} = \omega'\frac{\alpha\mu}{\beta\mu}$, et désignant par λ la constante $\frac{\omega}{\omega'}$, on aura $\frac{am}{bm} = \lambda\frac{a'm'}{b'm'}$.

N. B. Le point d'intersection des deux droites L, L′ ne sera pas, en général, un point commun des deux divisions. Ce point, considéré successivement comme appartenant à chacune des deux droites, correspondra à l'intersection de l'autre droite avec la troisième $\alpha\gamma$.

Puisque cette troisième droite xy est celle qui passe par les points A', B qui correspondent à l'intersection de L, L', représentant les points A, B' réunis, on trouverait la même droite xy si, au lieu de prendre pour points de concours b et b', on prenait, soit a et a', soit c et c'; ce qui fait voir que la propriété de deux séries rectilignes de trois points de deux droites n'est qu'un cas particulier de ce théorème, qui résulte du lemme:

Quand deux droites sont divisées homographiquement aux points a, b, c... m *et* a', b', c'... m', *deux droites quelconques* am' *et* ma' *qui joignent deux points de l'une des divisions aux points correspondants de l'autre, pris inversement, se coupent sur une même droite xy.*

46. *Quand deux droites sont divisées homographiquement, le rapport des distances d'un point* m *de l'une des divisions à deux points fixes* a, b *est au rapport des distances du point homologue* m' *aux deux points fixes homologues* a', b' *dans une raison constante;*

$$\text{car} \qquad \frac{am}{bm} = \lambda\, \frac{a'm'}{b'm'}\,.$$

Réciproquement : *Si* $\frac{am}{bm} = \lambda\, \frac{a'm'}{b'm'}$, *les points variables* m, m' *divisent homographiquement les deux droites* ab, a'b'.

Car c, c' étant deux positions particulières de m, m', $\frac{ac}{bc} = \lambda\, \frac{a'c'}{b'c'}$, et

$$\frac{ac}{bc} : \frac{am}{bm} = \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'm'}{b'm'}\,.$$

Points I *et* J' *qui correspondent à l'infini.* — La parallèle à L par b' coupe xy en n, et bn donne sur L' le point J' qui correspond au point à l'infini sur L. De même la parallèle à L' par b coupe xy en p, et $b'p$ donne sur L le point I qui correspond au point à l'infini sur L'.

N. B. Si les deux droites L, L' étaient parallèles, la troisième droite xy les couperait aux points I et J'.

47. *Le produit des distances de deux points homologues* m, m' *aux points* I *et* J' *respectivement est constant*, car chacun des points I et J' tient lieu d'un couple de points homologues I, ∞' et ∞, J' des deux divisions, qui seraient déterminées si on se donnait un troisième couple de points homologues a. a'. En effet, la parallèle à L' par a rencontrerait a'I en un point α. La parallèle à L par a' rencontrerait aJ' en γ, et $\alpha\gamma$ serait la troisième droite. m, m'; a, a'; ∞, J' et I, ∞ étant quatre couples de points correspondants des deux divisions $(am\mathrm{I}\infty) = (a'm'\infty'\mathrm{J}')$, on $\frac{\mathrm{I}a}{\mathrm{I}m} = \frac{\mathrm{J}'m'}{\mathrm{J}'a'}$ et

$$\mathrm{I}m \times \mathrm{J}'m' = \mathrm{I}a \times \mathrm{J}'a'. \text{ c. q. f. d.}$$

Réciproquement : *Deux points variables sur deux droites, tels que le produit de leurs distances à deux points fixes reste constant, divisent les deux droites homographiquement.*

Soit $am \times b'm = \lambda$. On pourra trouver deux points c, c' tels que $ac \times b'c' = \lambda$, et on aura

$$\frac{am}{ac} = \frac{b'c'}{b'm'} \text{ ou } \frac{am}{ac} : \frac{\infty m}{\infty c} = \frac{\infty' m'}{\infty' c'} : \frac{b'm'}{b'c'};$$

donc m, m' divisent homographiquement ac, et $b'c'$, a correspond à ∞', et b' à ∞.

48. *Les divisions homographiques deviennent des divisions proportionnelles lorsque* $\lambda = 1$.

Les points I et J' sont alors à l'infini, car la constante λ de la relation $\frac{am}{bm} = \lambda \frac{a'm'}{b'm'}$ se détermine par la condition que l'un des points m, m' sont à l'infini, d'où $\lambda = \frac{a\mathrm{I}}{b\mathrm{I}}$, ou $\lambda = \frac{b'\mathrm{J}'}{a'\mathrm{J}'}$; donc $a\mathrm{I} \times a'\mathrm{J}' = b\mathrm{I} \times b'\mathrm{J}'$, comme nous l'avions déjà trouvé. a étant différent de b et a' de b', λ ne peut être égal à l'unité, à moins que I et J' ne soient à l'infini.

49. Lorsque l'intersection des deux droites L, L' est un point commun des deux divisions, la troisième droite $\alpha\gamma$ passe par ce point, et il suffit de deux couples a, a'; b, b' de points homologues pour déterminer les deux divisions.

La troisième droite $\alpha\gamma$ devient la polaire du point E, où se coupent aa' et bb'. Alors les deux droites L, L' se transforment réciproquement l'une en l'autre.

Donc : *Des transversales issues d'un même point divisent homographiquement deux droites quelconques, et l'intersection de ces deux droites est un point commun des deux divisions.*

Réciproquement : *Quand deux droites sont divisées homographiquement et que leur intersection est un point commun aux deux divisions, les transversales qui joignent les points correspondants des deux divisions se coupent en un même point.*

Car les deux droites se transforment l'une en l'autre en prenant pour point de concours l'intersection de deux transversales aa', bb' par exemple; et comme $(Aa\,bm) = (Aa'\,b'm')$, toute autre transversale m,m' passe aussi par le point d'intersection de aa' et bb'.

DIVISIONS HOMOGRAPHIQUES SUR LA MÊME DROITE.

50. Soient a, a' ; b, b' ; c, c' trois couples de points correspondants sur une droite L. Transportons les points a', b', c' sur toute autre droite L′, et formons, comme on vient de l'expliquer, deux divisions homographiques sur les deux droites. En superposant la droite L′ sur la droite L, de manière que les points a', b', c' reprennent leurs positions primitives, il en résultera deux divisions homographiques sur la droite L.

51. *Points doubles.* — Il pourra arriver que deux points correspondants des deux divisions coïncident. Ils formeront alors ce qu'on appelle un *point double*. *Il ne peut exister que deux points doubles*; car la coïncidence de trois couples de points correspondants des deux divisions entraînerait celle de tous les autres, en vertu de l'égalité du rapport anharmonique.

Désignons par e et f les points doubles; on aura $\frac{em}{fm} = \lambda\,\frac{em'}{fm'}$.

Si l'un des points doubles f est à l'infini, $\frac{em'}{em} = \lambda$, les divisions sont proportionnelles et déterminées par deux couples a, a'; b, b' de points correspondants. L'autre point double se trouve par la condition $\frac{ea}{ea'} = \frac{ab}{a'b'}$.

Si l'autre point double e est aussi à l'infini, on a $ab = a'b'$, et les divisions sont égales de même sens ou de sens contraire.

Lorsque les points doubles existent, I et J′ étant les points qui correspondent à l'infini, O le milieu de IJ′ et O′ le point homologue de O, on a $eI \times eJ' = OI \times O'J'$, et prenant le point O pour origine des segments,

$$Oe^2 = OO' \times O'J';$$

donc les *points doubles sont à la même distance du milieu* O *des deux points* I *et* J'.

Pour qu'ils existent, il faut que les deux points O', J' *soient situés d'un même côté du point* O; sans cela, les deux segments OO', O'J' étant de direction contraire, Oe^2 serait négatif. On dit alors que les points doubles sont *imaginaires*.

Nous verrons bientôt comment on peut construire les points doubles, lorsqu'ils existent, au moyen des trois couples de points homologues qui déterminent les deux divisions.

DIVISIONS EN INVOLUTION.

52. Il peut arriver que les points I et J' de deux divisions homographiques, sur une droite L, coïncident. Ils se confondront avec le milieu O de IJ'; et puisque $Im \times J'm' =$ const., on aura $Om \times Om' =$ const.

Les divisions présenteront alors cette particularité, qu'il existera sur la droite L un point O dont le produit des distances à deux points homologues quelconques restera constant, et il suffira de connaître ce point O et un couple de points homologues a, a' pour déterminer les deux divisions.

Mais puisque $Om \times Om'$ est constant, on pourra intervertir entre eux deux points homologues quelconques m, m', ou en d'autres termes : *Un point considéré successivement comme appartenant, soit à la première division, soit à la seconde, aura toujours le même homologue.*

Les divisions qui jouissent de cette propriété sont dites en *involution*, et le point O est appelé *point central* ou *centre* de l'involution.

53. *Deux divisions homographiques sur la même droite sont en involution lorsque l'on peut intervertir entre eux deux points homologues* a, a'. Car soient m, m' deux autres points homologues quelconques. Aux points a, a', m, m' considérés comme appartenant à la première division, correspondront dans la seconde, a', a, m' et un quatrième point m'', tel que

$$(aa'mm') = (a'am'm'') = (aa'm''m'),$$

ce qui exige que m' coïncide avec m ; donc on pourra aussi intervertir deux autres points homologues quelconques m, m'.

54. *Deux couples* a, a' ; b, b' *de points homologues déterminent deux divisions en involution sur une droite* L (*fig.* 29).

Transportons les points a', b' sur une parallèle L' suivant une direction quelconque ; joignons ab', ba' qui se coupent en α et prenons pour troisième droite $\alpha\gamma$ une parallèle par le point α, à la direction suivant laquelle se déplacent les points a'. b'. Cette droite coupera L et L' en I et J', qui coïncideront en O lorsque a', b' reprendront leurs positions primitives sur L ; on aura par les triangles semblables

$$\frac{Oa}{Ob} = \frac{Ob'}{Oa'} \text{ et } Oa \times Oa' = Ob \times Ob'.$$

m étant un point quelconque de la première division, joignons $b'm$ qui coupe $\alpha\gamma$ en μ ; $b\mu$ déterminera le point correspondant m', et on aura par les triangles semblables

$$\frac{Om}{Ob} = \frac{Ob'}{Om'} \text{ d'où } Om \times Om' = Ob \times Ob' = Oa \times Oa';$$

donc les divisions seront en involution, et O sera le point central.

55. *Autres constructions du point central.* — Soit un quadrilatère MNPQ (*fig.* 30) dont deux côtés opposés passent par a, a', les deux autres par b, b', et qui ait une diagonale MP parallèle à la droite L ; l'autre diagonale NQ coupera cette droite au point central O,

$$\text{car } \frac{Oa'}{Ob} = \frac{PR}{MR} = \frac{Ob'}{Oa}, \text{ d'où } Oa \times Oa' = Ob \times Ob'.$$

56. *Toutes les circonférences qui ont pour cordes des segments en involution sur une droite et qui passent par un même point* g, *se coupent en un second point* g', *et la corde commune passe par le point central* O.

Car $Og \times Og' = Oa \times Oa' = Ob \times Ob'$.

57. *Points doubles.* — *Deux divisions en involution ont deux points doubles, réels ou imaginaires, dont le milieu est le point central* O.

Car, puisque $Om \times Om' =$ const., si les points m, m' sont situés d'un même côté du point O, il en sera de même pour tout autre couple de points homologues, et il existera deux points doubles e et f situés de part et d'autre du point O à la distance $\sqrt{Om \times Om'}$. On aura $Om \times Om' = oe^2 = of^2$; donc les deux points m, m' diviseront harmoniquement ef.

Ainsi : *Les divisions en involution qui ont des points doubles* e, f *sont formées par des couples de points conjugués sur* ef.

Si les points m, m' sont situés de différents côtés du point O, il en sera de même pour tout autre couple de points homologues, et les points doubles n'existeront pas. On dit alors qu'ils sont *imaginaires*, parce que Oe^2 est négatif.

58. *Les points doubles* e, f *de deux divisions homographiques sont en involution avec chaque système de couples de points tels que* a, b′ *et* b, a′.

Car $(a\,b\,e\,f) = (a'\,b'\,e\,f) = (b'\,a'\,f\,e)$: donc a, b, e, f et b', a', f, e appartiennent à des divisions homographiques dans lesquelles on peut intervertir e et f ; par conséquent ces divisions sont en involution, et a, b' ; b, a' sont deux couples de points homologues.

59. *Étant donnés trois couples* a, a′ ; b, b′ ; c, c′ *de points homologues sur une droite* L, *trouver les points doubles des deux divisions homographiques que déterminent ces trois couples de points.*

Prenons un point quelconque g extérieur à la droite L, et circonscrivons des circonférences aux triangles gab', $ga'b$; elles se couperont en un second point g'. Circonscrivons des circonférences aux triangles gac', $ga'c$; elles se couperont en un second point g''. La circonférence passant par les trois points g, g', g'' coupera la droite L aux points doubles e et f, car la circonférence gef doit passer par g' et par g'', puisque e et f sont en involution, soit avec ab' et ba', soit avec ac' et ca'.

La construction se prête à tous les cas.

60. *Étant données deux divisions en involution sur une droite, on peut reproduire la droite de manière que les points de l'une des divisions se transforment en points correspondants de l'autre, ou en symétriques de ces points, par rapport au centre* O.

S'il existe des points doubles, la droite se reproduira en prenant un de ces points e pour point de concours, et pour parallèle une droite quelconque passant par l'autre point double f. Deux points correspondants quelconques m, m' étant conjugués harmoniques sur ef se reproduiront réciproquement.

S'il n'existe pas de points doubles, deux points correspondants quelconques seront situés de différents côtés du point O, et si l'on prend un point m'_1, symétrique de m' par rapport à O, m et m'_1 seront deux points correspondants d'une involution qui aura deux points doubles ; donc la droite se reproduira de manière que m se transforme en m'_1, symétrique de m' par rapport à O.

S'il existe des points doubles, les tangentes à toutes les circonférences décrites sur les segments en involution comme diamètres, par le point central O, seront toutes égales. Car $Om \times Om'$, qui reste constant, est égal au carré de la tangente au cercle qui aurait mm' pour diamètre ; et ces tangentes seront égales à Oe ou à Of. Donc, en prenant la droite pour axe des x et un des points e ou f pour point de concours, toutes les circonférences se reproduiront en même temps, ce qui peint aux yeux l'involution.

S'il n'existe pas de points doubles, toutes les circonférences décrites sur les segments en involution auront une corde commune dont le milieu sera le point O.

Par conséquent. *Lorsque deux divisions en involution n'ont pas de points doubles, il existe deux points symétriques, de part et d'autre de la droite, desquels on voit tous les segments sous un angle droit.*

61. *Involution de six points.*— Trois couples de points conjugués de deux divisions en involution forment ce qu'on appelle une *involution de six points.*

Quatre de ces points, pris dans les trois couples, ont même rapport anharmonique que leurs homologues.

Réciproquement : Soient a, a' ; b, b' ; c, c' tels que, par exemple $(abcc') = (a'b'c'c)$; ces trois couples détermineront deux divisions homographiques; et, comme on peut intervertir les points homologues c, c', les divisions seront en involution.

$$(abcc') = (a'b'c'c), \quad \text{ou} \quad \frac{ca}{cb} : \frac{c'a}{c'b} = \frac{c'a'}{c'b'} : \frac{ca'}{cb'}$$

donne une relation entre huit segments

$$ca.ca'.c'b.c'b' = c'a'.c'a.cb'.cb$$

et on en trouverait deux autres de ce genre.

$$(aba'c) = (a'b'ac'), \quad \text{ou} \quad \frac{a'a}{a'b} : \frac{ca}{cb} = \frac{aa'}{ab'} : \frac{c'a'}{c'b'}$$

donne une relation entre six segments

$$ab'.cb'.c'a' = a'b.c'b.ca,$$

et on en trouverait trois autres du même genre.

On a en tout sept équations, dont chacune comporte les six autres, car elle exprime que les six points sont en involution.

62. *Involution de cinq points.* — Lorsque l'un des six points passe à l'infini, son conjugué forme ce qu'on appelle une involution de cinq points avec les quatre autres. Par exemple : si c passe à l'infini, en désignant par O ce que devient son conjugué c', la première des équations ci-dessus donne $Oa \times Oa' = Ob \times Ob'$; ainsi :

Le point central de l'involution a son conjugué à l'infini.

On a aussi une involution de cinq points lorsque deux points conjugués se réunissent en un seul pour former un point double. Par exemple :

$$ab.ab'.a'c.a'c' = a'b'.a'b.ac'.ac.$$

Lorsque c et c' se réunissent pour former un point double, e donne

$$\frac{ae^2}{a'e^2} = \frac{ab.ab'}{a'b'.a'b},$$

d'où résulterait une nouvelle construction des points doubles.

Si deux autres points conjugués, b, b' se réunissaient pour former un autre point double f, on aurait

$$\frac{ae^2}{a'e^2} = \frac{af^2}{a'f^2} \quad \text{ou} \quad \frac{ae}{a'e} = \frac{af}{a'f}.$$

Ainsi, une proportion harmonique est une *involution de quatre points.*

§ IX. Faisceaux homographiques.

Lemme. — *Le rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites est égal à celui des quatre points d'intersection par une transversale quelconque.*

Deux faisceaux de droites issues d'un même point ou de deux points différents sont dits homographiques lorsque le rapport anharmonique de quatre rayons quelconques de l'un des faisceaux est égal à celui des rayons correspondants de l'autre.

63. *Trois couples de rayons correspondants déterminent deux faisceaux homographiques.*

Car en les coupant par une transversale, on aura trois couples de points correspondants qui détermineront deux divisions homographiques, et les rayons menés aux points homologues de ces divisions formeront deux faisceaux qui seront homographiques, d'après le lemme.

64. *Des rayons issus de deux points fixes et se coupant deux à deux sur la même droite, forment deux faisceaux homographiques ayant pour rayon commun la ligne des centres.*

Évident, d'après le lemme.

65. Réciproquement : *Lorsque deux faisceaux homographiques ont pour rayon commun la ligne des centres, tous les autres rayons correspondants se coupent sur une même droite.*

Car trois couples de rayons homologues forment avec la ligne des centres deux faisceaux de quatre droites ayant pour rayon commun cette ligne et même rapport anharmonique; donc ces trois couples de rayons se coupent sur une droite, et en remplaçant un de ces couples par tout autre, on obtiendra un nouveau point de cette droite.

66. *Si par le point d'intersection de deux rayons homologues de deux faisceaux homographiques, on mène deux transversales qui coupent les faisceaux en deux séries de points, les droites qui joindront les points correspondants sur les deux transversales concourront en un même point.*

Car on aura, sur ces deux transversales, des divisions homographiques, et l'intersection des transversales sera un point commun de ces divisions.

En prenant pour transversales deux rayons correspondants des deux faisceaux, il en résulte ce théorème :

67. A,B *et* A′,B′ *étant deux couples de rayons correspondants de deux faisceaux homographiques, la droite qui joint l'intersection de* A *avec* B′ *à celle de* B *avec* A′ *passe par un point fixe.*

Ce point est l'intersection des deux rayons qui correspondent dans chaque faisceau à la ligne des centres considérée comme rayon de l'autre.

Comme trois droites quelconques issues d'un même point et trois autres droites quelconques issues d'un autre point, sont trois couples de rayons homologues de deux faisceaux homographiques, on retrouve le théorème déjà démontré sur trois angles qui sous-tendent une même corde.

68. *Rayons doubles.* — Lorsque deux faisceaux homographiques ont le même centre, aux *points doubles* des deux divisions homographiques sur une transversale correspondent des *rayons doubles* des deux faisceaux.

69. *Faisceaux en involution.* — Lorsque deux faisceaux de même centre donnent deux divisions en involution sur une transversale, on dit que les faisceaux sont en involution. Par conséquent, on peut alors intervertir les rayons homologues, et, pour que l'involution ait lieu, il suffit qu'on puisse intervertir deux rayons homologues, car les divisions sur la transversale seront alors en involution.

70. *Deux faisceaux de même centre qui ont les rayons homologues rectangulaires sont en involution.*

Car on peut intervertir les rayons. Ou bien, en projetant le centre sur une transversale quelconque, à cause de la propriété de la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse, on aura deux divisions en involution.

71. *Deux faisceaux en involution ont toujours un couple de rayons rectangulaires.*

Soit O le centre et a,a' ⁏ b,b' ⁏ c,c' ; . . . les divers couples de points en involution que l'on obtiendrait sur une transversale L. Les circonférences circonscrites aux triangles Oaa', Obb', Occ' . . . se couperont toutes en un second point O', qui ne sera pas généralement le symétrique de O par rapport à L, car dans ce cas tous les couples de rayons seraient rectangulaires. Donc il y aura un cercle unique passant par O, O', ayant son centre sur la transversale, qui coupera cette transversale en n, n'. On et On' seront deux rayons homologues des deux faisceaux, et leur angle nOn' sera droit.

Par conséquent : *Si deux couples de rayons homologues de deux faisceaux en involution sont rectangulaires, tous les autres couples le seront aussi.*

72. En joignant un point quelconque à six points en involution sur une droite, on a ce qu'on appelle une *involution de six droites.*

Trois couples de droites correspondantes sont en involution lorsque quatre de ces droites prises dans les trois couples ont le même rapport anharmonique que leurs homologues.

73. *La transformation de la figure n'altère ni l'homographie ni l'involution des divisions ou des faisceaux.*

Car nous avons vu que le rapport anharmonique de quatre points ou de quatre droites reste constant, de quelque manière qu'on transforme la figure.

74. *Les intersections d'une transversale quelconque avec les côtés opposés et les diagonales d'un quadrilatère, sont six points en involution.*

Transformons la figure de manière que la transversale soit parallèle à une des diagonales MP du nouveau quadrilatère MNPQ (*fig.* 30), et soit O le point où elle coupe l'autre diagonale NQ. On aura par les triangles semblables $\frac{Oa}{Ob'} = \frac{MR}{RP} = \frac{Ob}{Oa'}$, d'où $Oa \times Oa' = Ob \times Ob'$, ce qui prouve l'involution des trois couples de points a, a' : b, b' ; O, ∞, et par suite celle des trois couples a, a' ; b, b' ; c, c' de la figure primitive.

Ou bien : Dans la figure primitive, $M(NRQc) = P(NRQc)$. Estimant les rapports anharmoniques sur la transversale, on aura $(ac'bc) = (b'c'a'c) = (a'cb'c')$, ce qui prouve l'involution des six points.

75. *Étant donnés cinq points d'une droite, trouver le sixième point de l'involution en ne faisant usage que de la règle.*

On construira un quadrilatère dont deux côtés opposés passent par a, a'; les deux autres par b, b', et dont une diagonale NQ passe par le cinquième point c; l'autre diagonale MP passera par le sixième point c' de l'involution.

Cor. — *Si l'on déforme un quadrilatère de manière que les quatre côtés et une diagonale pivotent sur cinq points situés en ligne droite, l'autre diagonale coupera toujours la droite au même point.*

76. *Les six droites menées d'un même point aux sommets opposés et aux points de concours des côtés opposés d'un quadrilatère quelconque, sont en involution.*

Transformons la figure en prenant pour axe des y la troisième diagonale. Il en résultera un parallélogramme ABCD pour lequel il suffira de démontrer la proposition. Les droites menées par un point P aux quatre sommets du parallélogramme (*fig.* 31) et les parallèles PO, PH aux côtés, seront les six droites correspondantes de la nouvelle figure.

Prenons pour transversale un côté AB du parallélogramme. Les triangles OPL, CPG étant semblables, $\frac{OL}{CG} = \frac{PO}{PG}$. Les triangles OPK, GPD étant semblables $\frac{OK}{GD} = \frac{PO}{PG}$. Donc $\frac{OL}{CG} = \frac{OK}{CD}$, ou $\frac{OL}{OB} = \frac{OK}{OA}$; d'où $OL \times OA = OB \times OK$, ce qui prouve l'involution des trois couples de points A, L; B, K; O, ∞, et par suite celle des trois couples de droites PA, PC; PB, PD; PE, PF de la figure primitive, dont il faut prouver l'involution.

Ou bien, dans la figure primitive, joignons PF qui coupe les côtés opposés AB, BC en a et a'. On aura $(EAaB) = (EDa'C)$ et $P(EAaB) = P(EDa'C)$. Donc les quatre droites PE, PA, PF, PB ont même rapport anharmonique que PE, PD, Pa', PC, ou que PF, PC, PE, PD; d'où l'on voit que l'on peut intervertir PE et PF, ainsi que PA et PC, ou PB et PD, ce qui prouve l'involution.

Ces deux propositions peuvent se conclure réciproquement l'une de l'autre. Car PF et AB sont les diagonales d'un quadrilatère PAFB, et la droite DC coupe les côtés et les diagonales en six points en involution, d'où résulte l'involution des six droites du quadrilatère ABCD. Réciproquement, l'involution de ces six droites donne l'involution des six points sur la transversale EC du quadrilatère PAFB.

Cor. — *Si l'on déforme un quadrilatère de manière que les quatre sommets et une des extrémités de la troisième diagonale glissent sur cinq droites qui se coupent au même point, l'autre extrémité de la troisième diagonale glissera sur une sixième droite passant par le même point.*

Si le point P est à l'infini sur une direction quelconque,

Les parallèles par les sommets d'un quadrilatère et par les extrémités de la troisième diagonale donnent six points en involution sur une droite.

En d'autres termes : *Les projections, orthogonales ou obliques, des quatre sommets d'un quadrilatère et des extrémités de la troisième diagonale sur une droite quelconque sont six points en involution.*

77. *Les circonférences décrites sur les trois diagonales d'un quadrilatère comme diamètres se coupent aux deux mêmes points.*

Prenons pour le point P une des intersections des circonférences décrites sur deux des diagonales comme diamètres. Le faisceau des six droites aura deux couples de rayons rectangulaires ; par conséquent l'autre couple le sera aussi, et la circonférence décrite sur la troisième diagonale passera par l'intersection des deux autres.

Ainsi : *Il existe deux points desquels les trois diagonales d'un quadrilatère sont vues sous un angle droit.*

78. *Les milieux des trois diagonales d'un quadrilatère sont situés sur une même droite.*

Car les centres des circonférences décrites sur les trois diagonales comme diamètres sont sur la perpendiculaire élevée par le milieu de la corde commune.

§ X. Du pôle et de la polaire par rapport au cercle.

Lemme. — *Un cercle se reproduit en prenant pour point de concours un point extérieur, et pour parallèle la corde de contact de ce point.*

On le démontre directement comme il suit :

Soit C le centre du cercle (*fig.* 32), E un point extérieur et LI la corde de contact. Menons par le point E une sécante quelconque qui coupe le cercle en M, M′ et la corde de contact en F. Il s'agit de prouver que M,M′ sont conjugués harmoniques sur EF.

La corde de contact LI est aussi une corde d'un autre cercle qui a pour diamètre EC et passe par le milieu G de MM′. On a donc :

$$MF \times M'F = LF \times FI = EF \times FG\,;$$

ou $(MG - FG)(MG + FG) = (EG - FG) \times FG$, et réduisant : $EG \times FG = MG^2$; ce qui prouve que E et F sont conjugués harmoniques sur MM′ ; donc, réciproquement M,M′ sont conjugués harmoniques sur EF.

B et B′ sont conjugués harmoniques sur EA. Car le triangle rectangle ELC donne $CA . CE = CL^2 = CB^2$.

L'origine est en O milieu de OA, et $OB . OB' = OA^2$. OH étant la tangente au cercle par l'origine, $OB . OB' = OH^2$; donc $OH = OA$, et comme nous l'avions déjà vu :

Un cercle se reproduit en prenant pour axe des y une droite extérieure, pour axe des x le diamètre perpendiculaire, et pour distance de la parallèle la longueur de la tangente au cercle par l'origine.

Le centre C du cercle se transforme en un point C′ conjugué harmonique de l'origine O sur le diamètre BB′. Cela résulte d'ailleurs du triangle rectangle OCH, qui donne $OC \times OC' = OH^2 = OA^2$. Donc :

79. *On peut reproduire le cercle de manière que son centre* C *se transforme en tout autre point intérieur* C′.

L'origine sera le conjugué O de C′ sur le diamètre passant par ce point.

80. *On peut reproduire le cercle de manière qu'une corde se transforme en un diamètre.*

L'origine sera le sommet de l'angle circonscrit qui correspond à la corde.

81. *Lorsqu'une sécante tourne autour d'un point quelconque* P *du plan d'un cercle, le conjugué harmonique* Q *de ce point par rapport aux intersections de la sécante avec le cercle reste sur une droite perpendiculaire au diamètre passant par le point* P.

Si le point P est extérieur, en le prenant pour point de concours, le lieu du point Q sera la corde de contact de P.

Si le point P est intérieur, en reproduisant le cercle de manière que ce point soit le transformé du centre, la sécante sera la transformée d'un diamètre, et le lieu du point Q sera la droite prise pour axe des y.

A cause de cette propriété, le point P est dit le *pôle* de la droite que décrit le point Q, et la droite est dite la *polaire* du point P.

82. d, d' étant les distances du pôle et de la polaire au centre, et R le rayon du cercle,

$$d \times d' = R^2.$$

Donc : *Si le pôle est intérieur, la polaire est extérieure*, et réciproquement.

Si le pôle est un point de la circonférence, la polaire est la tangente en ce point, et réciproquement : *Le pôle d'une tangente est le point de contact.*

Si le pôle est à l'infini, la polaire est un diamètre, et réciproquement : *Un diamètre a son pôle à l'infini sur le diamètre perpendiculaire.*

Toutes les droites à l'infini ont pour pôle commun le centre du cercle.

83. *Lorsque deux transversales tournent autour d'un point quelconque du plan d'un cercle, les droites qui joignent deux à deux les intersections avec le cercle se coupent sur la polaire du point.*

Évident en prenant le point pour origine, s'il est extérieur, et son conjugué harmonique sur le diamètre, s'il est intérieur.

Donc : *Le tracé de la polaire d'un point quelconque n'exige que l'emploi de la règle.*

84. *Lorsque la corde de contact d'un angle circonscrit tourne autour de l'un de ses points, le sommet se meut sur la polaire de ce point.*

Même transformation.

85. Réciproquement : *Lorsque le sommet d'un angle circonscrit décrit une droite, la corde de contact tourne autour du pôle de cette droite.*

Évident en prenant la droite pour axe des y, si elle est extérieure, et, si elle est sécante, en reproduisant le cercle de manière qu'elle devienne un diamètre.

En résumé, on peut considérer la polaire d'un point, soit comme la corde de contact de ce point ; soit comme le lieu du conjugué harmonique de ce point par rapport aux intersections avec le cercle de toutes les sécantes passant par ce point ; soit comme le lieu du sommet d'un angle circonscrit dont la corde de contact passerait par ce point ; soit comme le lieu des intersections des droites qui joignent deux à deux les points où deux transversales, tournant autour du point, coupent le cercle, et il en résulte ces conséquences :

La polaire d'un point est le lieu des pôles de toutes les droites qui passent par ce point.

Le pôle d'une droite est l'intersection commune des polaires de tous ses points.

Donc : *Le pôle d'une droite peut s'obtenir en ne faisant usage que de la règle.*

Nous pouvons maintenant donner au lemme ce nouvel énoncé :

86. *Un cercle se reproduit en prenant pour point de concours un point quelconque qui ne soit pas sur la circonférence, et pour parallèle la polaire de ce point.*

Quelques exemples feront voir comment la reproduction du cercle facilite les démonstrations.

Dans un triangle inscrit à une conique, les intersections de chaque côté avec la tangente par le côté opposé sont trois points situés sur la même droite.

On peut remplacer la conique par un cercle, et reproduire le cercle en prenant pour axe des y la droite passant par les intersections de deux côtés avec les tangentes par les sommets opposés. On aura un triangle équilatéral inscrit au cercle, ce qui rend la proposition évidente.

Dans un triangle circonscrit à une conique, les droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés se coupent au même point.

Évident en remplaçant la conique par un cercle et reproduisant le cercle de manière que le triangle inscrit qui aurait pour sommets les points de contact du circonscrit devienne équilatéral, car le triangle circonscrit deviendra aussi équilatéral.

Donc : *Deux triangles, l'un inscrit à un cercle ou à une conique, et l'autre circonscrit, dont les points de contact soient les sommets de l'inscrit, sont homologiques, et l'axe d'homologie est la polaire du centre d'homologie par rapport au cercle ou à la conique.*

Soit un quadrilatère circonscrit à un cercle et un quadrilatère inscrit ayant pour sommets les points de contact du circonscrit : reproduisons le cercle en prenant pour axe des y la troisième diagonale du quadrilatère circonscrit. Il en résultera un losange circonscrit au cercle, dont les points de contact seront les sommets d'un rectangle inscrit, et de l'inspection de la nouvelle figure résulteront ces conséquences :

1° Les diagonales des deux quadrilatères primitifs se coupent au même point, et forment un faisceau harmonique ;

2° Les points de concours des côtés opposés sont quatre points en proportion harmonique sur une droite ;

3° Les diagonales du quadrilatère circonscrit passent par les points de concours des côtés opposés de l'inscrit.

N. B. Ces propositions subsistent en remplaçant le cercle par une conique.

Théorème de PASCAL. — Soit un hexagone inscrit à une conique. On peut remplacer la conique par un cercle, et reproduire le cercle de manière que deux couples de côtés opposés du nouvel hexagone soient parallèles. Il suffira de prouver que les deux côtés restants du nouvel hexagone sont aussi parallèles, ce qui est facile, pour qu'il devienne évident que *les côtés opposés d'un hexagone inscrit dans un cercle, ou dans une conique, se coupent en trois points situés sur une même droite.*

Théorème de BRIANCHON. — Soit un hexagone circonscrit à une conique. On peut remplacer la conique par un cercle, et reproduire le cercle de manière que le point d'intersection de deux des diagonales qui joignent les sommets opposés devienne le centre. Il suffira de prouver, ce qui est facile, que la troisième diagonale du nouvel hexagone passe aussi par le centre, pour qu'il devienne évident que *les diagonales qui joignent les sommets opposés d'un hexagone circonscrit à un cercle, ou à une conique, se coupent au même point.*

§ XI. — Droites conjuguées dans le cercle.

87. Lemme. — *Lorsqu'un cercle se reproduit, le pôle d'une droite devient le pôle de la nouvelle droite, et la polaire d'un point devient la polaire du nouveau point.*

Car les propriétés descriptives ou harmoniques du pôle et de la polaire ne sont pas altérées par la transformation.

On appelle *droites conjuguées* deux droites telles que le pôle de chacune par rapport au cercle soit situé sur l'autre. Par exemple, deux diamètres rectangulaires sont des droites conjuguées, car le pôle de chacun se trouve à l'infini sur la direction de l'autre.

88. *Lorsqu'un cercle se reproduit, deux droites conjuguées deviennent deux autres droites conjuguées.*

Conséquence du lemme.

89. *Il existe une infinité de systèmes de droites conjuguées qui se coupent en chacun des points du plan d'un cercle.*

1° Si le point est intérieur, reproduisons le cercle de manière que ce point devienne le centre. Deux diamètres rectangulaires deviendront deux droites conjuguées qui se couperont en ce point.

2° Si le point est extérieur, reproduisons le cercle en prenant ce point pour origine. Deux parallèles qui divisent harmoniquement le diamètre perpendiculaire à celui qui passe par le point, sont évidemment deux droites conjuguées, qui deviendront deux droites conjuguées se coupant au point extérieur pris pour origine.

3° Si le point est sur la circonférence, la tangente en ce point et toute corde passant par le point de contact, seront deux droites conjuguées.

90. *Les divers systèmes de droites conjuguées qui se coupent en un même point intérieur ou extérieur au cercle, sont autant de couples de rayons homologues de deux faisceaux en involution.*

Car les divers systèmes de diamètres rectangulaires, ou de parallèles qui divisent harmoniquement le diamètre perpendiculaire, sont évidemment en involution, et l'involution n'est pas altérée par la reproduction du cercle.

Donc : *Les droites conjuguées qui se coupent en un même point intérieur ou extérieur à un cercle, donnent des divisions en involution sur une droite quelconque.*

Le point central est l'intersection de la droite avec le diamètre perpendiculaire.

91. En particulier : *Les droites conjuguées qui se coupent en un même point donnent deux divisions en involution sur la polaire du point.* Il est facile de le démontrer *à priori*.

Soit P un point intérieur, et AB sa polaire (*fig.* 52). Prenons un point quelconque Q sur AB, et construisons la polaire PR de ce point. PQ et PR seront deux droites conjuguées, car le pôle PR est en Q sur AB, et le pôle de PQ est en R, intersection des polaires de Q et de P.

Reproduisons le cercle en prenant la polaire AB pour axe des y; l'axe des x sera le diamètre perpendiculaire, et la distance de la parallèle sera la longueur de la tangente OH par l'origine. Prolongeons PO d'une longueur $OE = OH$; QER sera l'angle des transformées des deux droites conjuguées PQ, PR. Or ces transformées sont deux diamètres rectangulaires du cercle; donc le triangle QER est rectangle en E, et $OQ \times OR = OE^2 = OH^2$ reste constant, ce qui prouve l'involution. Les points doubles sont imaginaires.

Soit P un point extérieur, et AB sa polaire (*fig.* 53) qui sera une corde du cercle. Prenons un point quelconque Q sur AB, et soit PR la polaire de ce point. PQ et PR seront deux droites conjuguées. Q et R divisant harmoniquement AB, dont le milieu est O, on aura $OQ \times OR = OA^2$, ce qui prouve l'involution. Le milieu de la corde est le point central, et les extrémités de la corde sont les points doubles.

Dans l'un et l'autre cas, chaque sommet du triangle PQR a pour pôle le côté opposé, d'où lui vient le nom de triangle *polaire*.

Donc : *Deux côtés quelconques du triangle polaire sont des droites conjuguées.*

Si le point P est extérieur, les deux droites conjuguées PQ, PR forment un faisceau harmonique avec les tangentes par le point P, et ces tangentes sont les rayons doubles des deux faisceaux en involution que donnent les droites conjuguées.

Si le point P est intérieur, les rayons doubles sont imaginaires, et on dit que ces rayons doubles sont les tangentes imaginaires au cercle par le point P.

92. *Le centre du cercle est le seul point de son plan pour lequel toutes les droites conjuguées soient rectangulaires.*

Car si le point P est intérieur, OP est moindre que la tangente OH ou que OE. L'angle QPR des deux droites conjuguées est obtus, et ne devient droit que lorsque, l'un des points Q ou R étant à l'infini, l'autre coïncide avec O.

Si le point est extérieur, l'angle QPR des deux droites conjuguées est évidemment aigu. Il devient nul lorsque Q et P coïncident en A ou en B, pour former les points *doubles* de l'involution, et ne devient droit que lorsque, l'un de ces points passant à l'infini, l'autre coïncide avec O.

D'ailleurs, on sait que deux faisceaux en involution ont un système unique de rayons rectangulaires, à moins que tous ne le soient.

§ XII. Centre de similitude, axe radical et contact des cercles.

93. Lemme. — *Un cercle se transforme en un autre cercle, en prenant pour point de concours un point qui ne soit pas sur la circonférence, et pour parallèle une parallèle à la polaire de ce point.*

Car le cercle se reproduit en prenant la polaire pour parallèle, et lorsque la distance de la parallèle varie, toutes les transformées sont semblables.

94. *Deux cercles se transforment l'un en l'autre, en prenant pour point de concours celui de leurs tangentes, extérieures ou intérieures, communes, et pour parallèle la parallèle à égale distance des cordes de contact de ce point.*

Soient C, C' les deux cercles (*fig.* 54), E le point de concours des tangentes extérieures ou intérieures communes; BD, B'D' les cordes de contact du point E, et LR la parallèle équidistante.

Prenons pour origine le point O milieu de EA. Le point B se transformera en un point b' de la direction EB, tel que $\frac{b'\mathrm{R}}{\mathrm{OE}} = \frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{AL}}{\mathrm{OA}}$. Comme OA = OE, on aura $b'\mathrm{R} = \mathrm{AL} = \mathrm{A'L}$; donc le point b' coïncidera avec B, et la corde de contact BD du premier cercle deviendra la corde de contact B′D′ d'un second cercle qui ne sera autre que C′.

Le rapport de similitude des deux cercles étant celui de OA à OL, on peut déterminer OL, de manière qu'un cercle de rayon R se transforme en tout autre de rayon donné R′. On aura $\frac{OA}{OL} = \frac{R}{R'}$, d'où $OL = \frac{OA \times R'}{R}$.

95. *Centres de similitude.* — Le point de concours E des tangentes extérieures communes est appelé *centre de similitude directe* des deux cercles C, C′. Les rayons CB, C′B′ menés aux points de contact de l'une de ces tangentes sont parallèles et de même direction. d étant la distance des centres, $\frac{EC}{EC'} = \frac{R}{R'}$, d'où $EC = \frac{d \times R}{R' - R}$, et $EC' = \frac{d \times R'}{R' - R}$. Ces distances ne dependant que de celle des centres et des longueurs des rayons :

Toute droite qui joint les extrémités de deux rayons parallèles, de même direction, passe par le centre de similitude directe des deux cercles.

Le point de concours E′ des tangentes intérieures est appelé *centre de similitude inverse*. Les rayons menés aux points de contact de l'une de ces tangentes sont parallèles, mais de direction contraire. $\frac{E'C}{E'C'} = \frac{R}{R'}$ d'où $E'C = \frac{d \times R}{R + R'}$, et $E'C' = \frac{d \times R'}{R + R'}$.

Ces distances ne dépendant que de celle des centres et des longueurs des rayons :

Toute droite qui joint les extrémités de deux rayons parallèles, de direction contraire, passe par le centre de similitude inverse des deux cercles.

Par conséquent : *Deux diamètres parallèles sont les bases d'un trapèze dont les côtés se coupent au centre de similitude directe, et les diagonales au centre de similitude inverse.*

Les deux centres de similitude sont conjugués harmoniques par rapport aux deux centres de figure; d'ailleurs $\frac{CE}{C'E} = \frac{R}{R'} = \frac{CE'}{C'E'}$.

Ainsi : *Deux cercles ont toujours, quelle que soit leur position relative, deux centres de similitude.*

Lorsque les cercles sont égaux, le centre de similitude directe est à l'infini, et le centre de similitude inverse est le milieu de la ligne qui joint les centres de figure.

Lorsqu'ils se touchent, le point de contact est un centre de similitude, directe ou inverse, suivant que le contact est intérieur ou extérieur, et l'autre centre est son conjugué harmonique.

Si l'un de ces cercles se réduit à un point, parce que son rayon devient nul, *les deux centres de similitude coïncident avec ce point.*

Si l'un des cercles devient une droite, parce que son rayon est infini, *les deux centres de similitude sont les extrémités du diamètre de l'autre cercle perpendiculaire à la droite.*

Lorsque les cercles sont concentriques, les deux centres de similitude coïncident avec leur centre commun de figure.

96. Les polaires des centres de similitude par rapport à chacun des deux cercles sont dites *polaires de similitude, directe ou inverse*, suivant la dénomination du centre auquel elles se rapportent.

97. *La parallèle également distante des polaires de similitude directe est aussi également distante des polaires de similitude inverse.*

Soient C,C' deux cercles quelconques (*fig.* 55). Les rayons parallèles de même direction CP, C'P' donnent le centre E de similitude directe, dont les polaires sont AM et BM. Les rayons de direction contraire CQ, C'P' donnent le centre E' de similitude inverse, dont les polaires sont A'M', B'M'. Il s'agit de démontrer que le milieu de AB est aussi le milieu de A'B', ou que AA' = BB'.

AA' = CA' — CA. Par les propriétés des polaires ou par les triangles rectangles CFA', CGA,

$$CA' = \frac{R^2}{CE'}, \quad CA = \frac{R^2}{CE}; \quad \text{donc } AA' = \frac{R^2 \times EE'}{CE \times CE'},$$

$$BB' = C'B + C'B'; \; C'B = \frac{R'^2}{C'E}; \; C'B' = \frac{R'^2}{C'E'}; \quad \text{donc}$$

$$BB' = \frac{R'^2 \times EE'}{C'E \times C'E'}. \quad \text{Mais } \frac{CE}{C'E} = \frac{R}{R'} = \frac{CE'}{C'E'}, \quad \text{d'où } \frac{CE \times CE'}{C'E \times C'E'} = \frac{R^2}{R'^2}$$

et par suite AA' = BB'.

Axe radical. — On appelle axe radical la parallèle LR, également distante des polaires de similitude de chacun des deux cercles.

Nous pouvons maintenant donner au lemme cet autre énoncé :

98. *Deux cercles se transforment l'un en l'autre, en prenant pour point de concours un de leurs centres de similitude, et pour parallèle leur axe radical.*

Il en résulte ces conséquences.

Une transversale quelconque par l'un des centres E *de similitude coupe les cercles en des points correspondants* M,M' ; N,N' (*fig.* 56), *et les tangentes en ces points se coupent sur l'axe radical.*

Deux transversales quelconques par l'un des centres de similitude déterminent deux quadrilatères inscrits MNPQ, M'N'P'Q' *qui se transforment l'un en l'autre. Deux côtés opposés de chacun d'eux, ainsi que les diagonales, se coupent respectivement sur les polaires du centre de similitude pris pour point de concours, et les côtés correspondants* MP,M'P' ; NQ,N'Q' *se coupent sur l'axe radical.*

On trouvera facilement l'autre centre et ses polaires, car les diamètres passant par des points homologues des deux cercles M,N' ou N,M' seront parallèles. Ainsi : *Connaissant un centre de similitude, on construira l'axe radical, les polaires de ce centre, l'autre centre et ses polaires, en ne faisant usage que de la règle.*

Il suffira de connaître une droite passant par un des centres de similitude.

Car les pôles de cette droite par rapport à chacun des cercles seront des points correspondants des deux figures, et la ligne qui les joindra donnera le centre de similitude par lequel passe la droite.

99. *Connaissant un point* α *de l'axe radical, construire cet axe, les centres de similitude et leurs polaires.*

Les polaires de ce point, par rapport à chacun des cercles, étant des droites correspondantes, se couperont en un second point de l'axe radical ; et comme elles coupent respectivement les cercles en des points correspondants, il en résultera les centres de similitude, et par suite leurs polaires.

100. *N. B.* Deux points correspondants des deux cercles tels que M,M′, ne sont pas des points *homologues* de ces cercles considérés comme figures semblables. Car l'homologue de M est N′, déterminé par le rayon C′N′ parallèle à CM, et non pas M′, qui est dit l'*anti-homologue* de M.

Le point d'*entrée* M de la sécante, pour le premier cercle, se transforme en point de *sortie* M′, pour le second ; et réciproquement, le point de sortie N se transforme en point d'entrée N′.

Dans les deux quadrilatères MNQP, M′N′Q′P′, les côtés NQ, M′P′ sont parallèles, comme étant deux transformées de la même droite MP, ou à cause de la similitude des triangles CNQ, C′M′P′. Il en est de même pour MP et N′Q′. Les diagonales MQ, N′P′ ou NP, M′Q′ sont aussi parallèles, et il en résulte ce théorème :

Si par un des centres de similitude de deux cercles on mène deux sécantes communes, en prenant sur chaque sécante un point d'entrée sur l'une des circonférences et un point de sortie sur l'autre, les quatre points seront situés sur une même circonférence.

Cor. — *Les quatre points de contact des tangentes extérieures et intérieures communes à deux cercles sont sur une même circonférence.*

101. *L'axe radical est le lieu des points par lesquels on peut mener aux deux cercles des tangentes égales.*

Par un des centres de similitude E (*fig.* 36) menons une sécante qui coupe le premier cercle en M,N, et le second en M′,N′. Les tangentes en ces points formeront un parallélogramme $\alpha\beta\alpha'\beta'$ dont une diagonale $\alpha\alpha'$ sera l'axe radical, et dont l'autre $\beta\beta'$ passera par le centre de similitude.

Les triangles βMN, αMM′ étant semblables, et le premier étant isocèle, la tangente αM est égale à la tangente αM′. De même les tangentes α'N et αN sont égales à cause de la similitude des triangles βMN, α'NN′.

102. *L'axe radical est le lieu des points dont la différence des carrés des distances aux centres des deux cercles est constante.*

Par les triangles rectangles αMC, αC′M′,

$$\alpha M^2 = \alpha C^2 - R^2,\ \alpha M'^2 = \alpha C'^2 - R'^2\,;$$

et comme $\alpha M = \alpha M'$, $\alpha C'^2 - \alpha C^2 = R'^2 - R^2 = \text{const.}$

Soit K le milieu de CC′, on aura, pour déterminer le point L où l'axe radical coupe la ligne des centres. $KL = \frac{R'^2 - R^2}{2CC'}$.

103. Ainsi : *L'axe radical existe, quelle que soit la position relative des deux cercles.*

Lorsque deux cercles se coupent, l'axe radical est leur corde commune.

Lorsqu'ils se touchent, l'axe radical est leur tangente commune.

Lorsqu'ils sont concentriques, l'axe radical est à l'infini.

L'axe radical d'un cercle et d'un point est la parallèle à la polaire du point, également distante du point et de la polaire.

L'axe radical d'un cercle et d'une droite est la droite elle-même.

L'axe radical d'un point et d'une droite est la droite elle-même.

104. *Décrire un cercle ayant pour axe radical avec un cercle* C *une droite* AB, *et passant par un point donné, ou touchant une droite donnée* (fig. 57).

Si AB coupe le cercle C, le cercle demandé passera par les extrémités de la corde et par le point donné, ou passera par les extrémités de la corde et sera tangent à la droite donnée.

Si AB est extérieur au cercle C, menons par un point P de AB une sécante qui coupe C en M,N, et joignons le point P au point donné M′. La circonférence passant par M,N,M′ coupera PM′ en N′, de manière que $PM \times PN = PM' \times PN'$. M′N′ sera la corde d'un nouveau cercle C′ ayant son centre sur la perpendiculaire abaissée de celui de C sur la droite AB, et cette droite sera l'axe radical de C,C′, car les tangentes par le point P seront égales.

Si le cercle C′ doit être tangent à une droite PS′, soit P le point où elle coupe AB. Prenons une longueur PS′ égale à celle de la tangente PS à C, par le point P; on aura le point de contact de C′ avec la droite PS′, et par suite le centre sur la perpendiculaire abaissée de celui de C sur AB.

On pourra ainsi construire une infinité de cercles ayant un axe radical donné avec le cercle C, et passant par des points donnés ou tangents à des droites données.

105. *Tous les cercles qui ont le même axe radical donnent des divisions en involution sur la ligne des centres et sur une transversale quelconque.*

Car, soit O le point où l'axe radical coupe la ligne des centres, et ab le diamètre de l'un des cercles C. Si l'axe radical est une corde commune, $Oa \times Ob$ sera égal au carré de la moitié de cette corde, et par conséquent constant. Si l'axe radical est extérieur, $Oa \times Ob$ sera égal au carré de la tangente par le point O à l'un des cercles, et par conséquent constant.

L'involution aura alors des points doubles e et f que l'on peut considérer comme des cercles de rayon nul, ayant aussi le même axe radical. Poncelet les appelle *points limites*, et ces points sont conjugués harmoniques sur le diamètre de chaque cercle.

On démontrera de même qu'il y aurait involution sur une transversale quelconque qui couperait les cercles.

106. *Deux ou plusieurs cercles qui ont le même axe radical extérieur peuvent se reproduire en même temps.*

On prendra pour axe des y l'axe radical commun, et pour distance de la parallèle la longueur de la tangente à l'un des cercles par le point où l'axe radical coupe la ligne des centres. Les centres de similitude E, E′ se transformeront réciproquement l'un en l'autre : les tangentes extérieures communes deviendront les tangentes intérieures, et réciproquement.

107. *Les tangentes à tous les cercles de même axe radical, par un même point* P *de cet axe, ont leurs points de contact sur une même circonférence qui coupe orthogonalement chacun des cercles.*

On appelle angle de deux arcs de cercle, ou de deux courbes, qui passent par un point, l'angle des tangentes par ce point à chacun des arcs ; et lorsque l'angle de ces tangentes est droit, on dit que les deux arcs se coupent *orthogonalement*.

Cela posé, soient PR, PS, PS′, PR′ . . . (*fig*. 57) des tangentes aux cercles C, C′ . . . par un point P de leur axe radical commun. Toutes ces tangentes seront égales ; et comme le rayon CR du cercle C, par exemple, sera perpendiculaire à la tangente PR, la circonférence décrite avec PR pour rayon passera par tous les points de contact R, S, S', R . . . et coupera orthogonalement chacun des cercles.

Réciproquement : *Toutes les circonférences qui coupent orthogonalement des cercles de même axe radical ont leurs centres sur cet axe.*

Car, R étant un des points d'intersection avec un des cercles C, la perpendiculaire à l'extrémité du rayon CR donnera le centre P de la circonférence sur l'axe radical.

108. *Toutes les circonférences qui coupent orthogonalement des cercles C, C' . . . de même axe radical, ont pour axe radical commun la ligne des centres de ces cercles.*

Car les tangentes par le centre de C, par exemple, à chacun des cercles P, P'. . . sont égales au rayon de ce cercle.

N. B. Si l'axe radical des cercles C, C' . . . est extérieur, celui des cercles P, P'. . . sera une corde commune, et réciproquement.

109. *Centre radical. — Les axes radicaux de trois cercles pris deux à deux se coupent au même point.*

Soient C, C', C'' les trois cercles : R, R', R'' les rayons, et α le point où l'axe radical de C, C' coupe celui de C, C''. On aura $C\alpha^2 - C'\alpha^2 = R^2 - R'^2$. $C\alpha^2 - C''\alpha^2 = R^2 - R''^2$; d'où $C'\alpha^2 - C''\alpha^2 = R'^2 - R''^2$, ce qui prouve que le point α appartient aussi à l'axe radical de C', C''.

Cor. — *Si les cercles se coupent deux à deux, les trois cordes communes se couperont au même point.*

Si les cercles se touchent deux à deux, les tangentes communes se couperont au même point.

Le point où les axes radicaux de trois cercles pris deux à deux se coupent est appelé le *centre radical* de ces cercles.

N. B. On construira facilement l'axe radical de deux cercles quelconques au moyen d'un troisième qui coupe chacun d'eux. Les deux cordes se couperont en un point de l'axe radical qui sera la perpendiculaire abaissée de ce point sur la ligne des centres des deux cercles donnés.

110. *Axes de similitude. — Trois cercles, pris deux à deux, ont trois centres de similitude directe et trois centres de similitude inverse. Ces* *six points sont situés, trois à trois, sur quatre droites* que l'on appelle *axes de similitude.*

Soient C, C′, C″ les centres de trois cercles, et CA, C′A′, C″A″ trois rayons parallèles. Les triangles CC′C″ et AA′A″ ayant leurs sommets sur trois parallèles, les côtés correspondants se couperont en trois points situés sur la même droite, et ces points seront des centres de similitude des cercles, pris deux à deux.

Si les trois rayons sont de même direction, on aura trois centres de similitude directe situés sur une droite que l'on appelle *axe de similitude directe.* Si l'un des rayons est de direction contraire à celle des deux autres, on aura un centre de similitude directe et deux centres de similitude inverse situés sur une droite qu'on appelle *axe de similitude inverse*, et il existera trois de ces axes.

111. *Cercle tangent à trois autres.* — Le problème a huit solutions, car les trois cercles donnés peuvent être touchés intérieurement ou extérieurement; chacun d'eux peut être touché intérieurement, et les deux autres extérieurement; ou extérieurement et les deux autres intérieurement.

Deux cercles qui ont un contact extérieur et un contact intérieur avec chacun des trois cercles donnés, sont dits *conjugués.*

Soient C, C′, C″ les trois cercles, et O, O′ les deux cercles conjugués qui les touchent, par exemple, intérieurement en a, a', a'', et extérieurement en b, b', b'' (*fig.* 38). Le problème consiste à trouver ces points de contact.

La corde de contact ab passe par le centre de similitude inverse des deux cercles conjugués O, O′, car a est le centre de similitude directe de C,O, et b le centre de similitude inverse de C,O′. Il en est de même pour les cordes de contact $a'b'$ et $a''b''$. Donc : *Les trois cordes de contact* ab, a′b′, a″b″ *se coupent en un point* R, *centre de similitude inverse des deux cercles* O,O′.

Le point R *est le centre radical des trois cercles* C, C′, C″.

Car les triangles $aa'a''$, $bb'b''$ sont homologiques, et aa', bb' se coupent en E″, centre de similitude directe de C,C′. Comme ces deux cercles se transformeraient l'un en l'autre en prenant E″ pour point de concours et leur axe radical pour parallèle, les deux droites homologues ab, $a'b'$ se coupent sur cet axe radical, et R est un point de cet axe. On démontrerait de même que R est sur l'axe radical de C,C'' et sur celui de C',C''.

L'axe radical des cercles conjugués O,O' *est l'axe de similitude directe de* C,C',C''.

Car O,O' se transformeraient l'un en l'autre en prenant pour point de concours leur centre R de similitude inverse, et pour parallèle leur axe radical. Donc *aa'* et *bb'* sont des droites correspondantes de O,O' qui se coupent sur leur axe radical en E'', centre de similitude directe de C,C'. De même *aa''*, *bb''* se coupent sur l'axe radical de O,O' en E', centre de similitude directe de C,C'', et *a'a''*, *b'b''* se coupent aussi sur cet axe radical en E, centre de similitude directe de C',C''.

Les pôles de l'axe de similitude directe des trois cercles, par rapport à chacun de ces cercles, sont situés sur les cordes de contact ab, a'b', a''b''.

Car lorsque les cercles O,O' se transforment l'un en l'autre, les tangentes aux points homologues *a,a'*, *b,b'* se coupent sur l'axe radical de O,O', qui n'est autre que l'axe de similitude directe de C,C',C'' ; et puisque *ab* est la polaire d'un point de cet axe, le pôle de cet axe par rapport à C est sur la polaire *ab* de ce point. De même les pôles de cet axe par rapport à C' et C'' sont des points des cordes de contact *a'b'* et *a''b''*.

En résumé : 1° *Les cordes de contact* ab, a'b', a''b'' *se coupent au centre radical* R *des trois cercles* C, C', C'' ;

2° *Chacune de ces cordes contient le pôle, par rapport à son cercle, de l'axe de similitude directe de* C,C',C''.

Il en résulte cette élégante solution que l'on doit à Gergonne :

Cherchez un des quatre axes de similitude des trois cercles, les pôles de cette droite par rapport à chacun d'eux et le centre radical. Les droites qui joindront le centre radical aux trois pôles donneront, sur chaque cercle, les points de contact avec les deux cercles conjugués qui correspondent à l'axe de similitude.

N. B. On peut éviter la construction de l'axe radical, car les polaires des centres de similitude sont parallèles deux à deux, et le centre radical est l'intersection des diagonales du parallélogramme formé par deux couples de ces polaires.

Le point R, étant le centre de similitude inverse de O,O′, est situé sur la ligne des centres des deux cercles conjugués O,O′, et cette ligne est perpendiculaire à l'axe radical de ces deux cercles, ou à l'axe de similitude directe de C,C′,C″.

Par conséquent : *Les lignes des centres des quatre couples de cercles conjugués se coupent au centre radical des trois cercles, et sont respectivement perpendiculaires à chacun des quatre axes de similitude.*

La solution se prête à tous les cas, comme on pourra le voir par ces exemples :

Décrire un cercle passant par un point donné P *et touchant deux cercles donnés* C, C′.

Quatre solutions : car on n'a que deux axes de similitude. On les obtient en joignant le point P aux centres de similitude directe et inverse des deux cercles. Le centre radical est l'intersection des deux parallèles aux polaires du point, par rapport à chacun des cercles, également distantes du point et de chaque polaire.

Décrire un cercle touchant une droite L *et deux cercles donnés* C,C′.

Huit solutions : Les centres de similitude d'un cercle et d'une droite étant les extrémités du diamètre perpendiculaire, on a quatre axes de similitude. Le centre radical est l'intersection de la droite et de l'axe radical des deux cercles, car celui d'une droite et d'un cercle est la droite elle-même.

Décrire un cercle passant par deux points P, P′ *et touchant un cercle donné* C.

Deux solutions : La droite qui joint les deux points est le seul axe de similitude. L'axe radical des deux points est la perpendiculaire sur le milieu de la ligne qui les joint.

Décrire un cercle touchant deux droites et un cercle donné C.

Huit solutions : Les quatre axes de similitude sont les côtés du rectangle qui a pour diagonales les diamètres du cercle C perpendiculaires aux deux droites.

Décrire un cercle touchant une droite L, *un cercle* C, *et passant par un point* P.

Quatre solutions : Les deux axes de similitude sont les lignes qui joignent le point P aux extrémités du diamètre de C perpendiculaire à L. Le centre radical est le point où la droite est coupée par la parallèle équidistante du point et de sa polaire.

§ XIII. Propriétés des coniques.

Lemme. — *Un cercle peut se transformer en une conique quelconque.*

112. *Toute conique a un centre.* Le pôle de la droite prise pour axe des y devient le milieu de toutes les cordes de la conique qui sont les transformées de celles du cercle se coupant au pôle.

Le centre de l'ellipse est intérieur à la courbe, celui de l'hyperbole est extérieur, celui de la parabole est à l'infini.

113. *Toute conique a une infinité de diamètres qui se coupent au centre.*

La polaire CD d'un point quelconque Q de l'axe des y (*fig.* 53) passe par le pôle P de cet axe, et se transforme en une droite C′D′ qui passe par le centre P′ de la conique, et qui divise en parties égales toutes les cordes de la conique parallèles à la direction EQ.

Ainsi, pour une conique comme pour le cercle, *le lieu des milieux d'un système de cordes parallèles est une droite* que l'on appelle *diamètre*, et qui prend le nom d'*axe* lorsque son angle avec la corde est droit.

114. *Les tangentes par les extrémités d'un diamètre de la conique sont parallèles aux cordes conjuguées*, ou aux cordes que le diamètre divise en parties égales.

Car les tangentes QC, QD du cercle deviennent des tangentes parallèles à EQ aux extrémités du diamètre C′D′ de la conique.

115. *Tous les diamètres de la parabole sont parallèles.*

Car le centre est à l'infini.

116. *Toute conique a une infinité de systèmes de diamètres conjugués*, ou de diamètres tels que chacun divise en parties égales les cordes parallèles à l'autre.

Ils sont donnés par les divers systèmes de droites conjuguées, telles que PQ, PR, qui se coupent au pôle P de l'axe des y.

L'angle QER de ces diamètres ne devient droit que si l'un des points Q ou R étant à l'infini, l'autre coïncide avec O. Ainsi :

Les axes de la courbe forment un système unique de diamètres conjugués rectangulaires.

117. *Ellipse.*— L'axe des y étant extérieur au cercle (*fig.* 33), le pôle P est intérieur. Les points Q et R sont situés de différents côtés de l'origine O, et OQ $\times$ OR reste constant. L'angle QER des diamètres conjugués n'est jamais nul, mais devient minimum lorsque OQ $=$ OR. Les diamètres sont alors dirigés suivant les diagonales du rectangle des axes, et, à cause de la symétrie de la courbe par rapport aux axes, ces diamètres sont égaux.

Donc : *L'ellipse a un système unique de diamètres conjugués égaux dirigés suivant les diagonales du rectangle des axes, et ces diamètres sont ceux qui se coupent sous le plus petit angle.*

L'ellipse a deux systèmes de diamètres conjugués qui se coupent sous tout autre angle.

Ils sont donnés par les droites conjuguées qui passent par les points Q, R et par celles qui passent par les points symétriques Q', R'.

Deux diamètres conjugués de l'ellipse ne sont jamais compris dans le même angle de deux autres diamètres conjugués.

Car OQ $\times$ OR restant constant, si un des facteurs diminue, l'autre augmente.

Les tangentes à l'ellipse par les extrémités de deux diamètres conjugués sont les côtés d'un parallélogramme circonscrit que l'on appelle *parallélogramme conjugué.*

118. *Hyperbole.* — L'axe des y coupant le cercle, le pôle P est extérieur. Les points Q et R sont d'un même côté de l'origine O, et conjugués harmoniques sur la corde AB du cercle. L'angle QER des diamètres conjugués devient nul lorsque Q et R coïncident en A ou en B. Les tangentes PA, PB au cercle se transforment en asymptotes de l'hyperbole ; donc :

Chaque asymptote de l'hyperbole représente deux diamètres conjugués dont l'angle est nul, et les deux asymptotes forment un faisceau harmonique avec chaque système de diamètres conjugués.

Les parties d'une sécante comprises entre la courbe et les asymptotes sont égales.

Car, la sécante étant parallèle à un diamètre de la courbe, la partie comprise, soit entre les asymptotes, soit entre la courbe, a son milieu sur le diamètre conjugué.

Un des diamètres conjugués C'D' rencontre la courbe sur chacune des deux branches, et est dit *transverse*. L'autre diamètre P'Q' ne rencontre pas la courbe, et est dit *non transverse*.

Les tangentes par les extrémités d'un diamètre transverse sont les côtés d'un parallélogramme qui a pour diagonales les asymptotes, et que l'on appelle *parallélogramme conjugué*.

N. B. On prend, pour représenter la longueur du diamètre non transverse, la partie de la tangente parallèle comprise entre les asymptotes.

Deux diamètres conjugués de l'hyperbole ne sont jamais compris dans le même angle des asymptotes, et toujours compris dans le même angle de deux autres diamètres conjugués.

Car Q et R sont conjugués harmoniques sur AB, et OQ $\times$ OR restant constant, si l'un des facteurs diminue, l'autre augmente.

L'hyperbole a deux systèmes de diamètres conjugués qui se coupent sous le même angle.

Ils sont donnés par les points Q, R et leurs symétriques Q', R'.

Lorsque OE $=$ OA $=$ OB, l'angle AEB des asymptotes devient droit, et l'hyperbole est dite *équilatère*.

Les asymptotes d'une hyperbole équilatère sont les bissectrices des angles de tous les diamètres conjugués.

Car elles sont rectangulaires et forment un faisceau harmonique avec deux diamètres conjugués.

119. *Parabole.* — L'axe des y étant tangent au cercle, cet axe et une corde quelconque passant par le point de contact sont deux droites conjuguées du cercle. Donc :

Chacun des diamètres de la parabole a pour conjugué une droite à l'infini, parallèle à la tangente par son extrémité.

120. *Pôle et polaire.* — Le pôle d'une droite par rapport au cercle devenant le pôle de la transformée par rapport à la conique, la théorie est la même que pour le cercle. Le pôle d'une droite est situé sur le diamètre de la conique conjugué de sa direction, et d, d' étant les distances du pôle et de la polaire au centre, en représentant par a le demi-diamètre conjugué,

$$d \times d' = a^2.$$

La partie du diamètre de la parabole comprise entre le pôle et la polaire a son milieu sur la courbe, car un des quatre points en proportion harmonique sur le diamètre est à l'infini.

121. *Droites conjuguées.* — Les droites conjuguées par rapport au cercle devenant des droites conjuguées par rapport à la conique, la théorie est aussi la même que pour le cercle.

122. *Cordes supplémentaires.* — On appelle ainsi deux cordes qui joignent les extrémités d'un diamètre à un même point de la conique.

Deux cordes supplémentaires sont parallèles à deux diamètres conjugués de la conique.

On obtient ces diamètres en joignant le centre au milieu de chacune de ces cordes.

On trouve les diamètres conjugués de la conique qui se coupent sous un angle donné, en décrivant un segment de cercle capable de cet angle sur un des diamètres de la courbe, ce qui donne les deux systèmes de cordes supplémentaires qui se coupent sous cet angle.

123. *Foyers et directrices.* — Nous avons transformé le cercle en prenant pour point de concours un point quelconque.

Prenons le centre F du cercle pour point de concours. Toute droite passant par ce centre se reproduira, et les divers systèmes de diamètres rectangulaires du cercle seront les divers systèmes de droites conjuguées de la transformée (ellipse, hyperbole ou parabole, suivant que l'axe des y sera extérieur au cercle, sécant ou tangent).

Tous les systèmes de droites conjuguées de la conique qui se coupent en F étant rectangulaires, le centre F du cercle devient un *foyer* de la conique. Ce foyer est le pôle de l'axe des y par rapport à la conique, et cet axe est la *directrice* correspondante, qu'il serait mieux d'appeler *polaire focale*, comme le proposa Poncelet.

Ou bien : Nous avons transformé le cercle en prenant pour parallèle une droite quelconque. Examinons le cas où la parallèle passe par le centre F du cercle (*fig.* 59). Ce point sera commun aux deux courbes, et deviendra le pôle de la droite fixe pour axe des y, par rapport à la transformée, car les tangentes au cercle en A et B, étant parallèles, se transforment en tangentes en A et B à la conique qui se coupent à l'origine O.

Le rayon FM qui coupe l'axe des y en I se transforme en une parallèle FM' à EI. De même, tout autre rayon FN qui coupe l'axe des y en K se transforme en une parallèle FN' à EK. Donc l'angle IEK des transformées est égal à l'angle IFK des rayons FM, FN du cercle. Par conséquent l'angle de deux diamètres rectangulaires du cercle ne sera pas altéré par la transformation. Donc le centre F du cercle sera le *foyer* de la conique, et l'axe des y sera la *polaire focale* ou la *directrice*.

Ainsi : *Une conique peut être considérée de deux manières, comme la transformée d'un cercle qui aurait pour centre un foyer.*

124. *Les foyers ne peuvent être situés que sur les axes de la conique.*

Car, pour tout autre point qui ne serait pas sur un des axes, le diamètre passant par ce point et la parallèle au conjugué seraient deux droites conjuguées non rectangulaires.

125. On appelle *rayon vecteur* toute droite telle que FM' qui joint le foyer à un point de la conique. L'abscisse OP' de l'extrémité M' du rayon vecteur est égale à la distance du point M' à la directrice Oy.

La similitude des triangles rectangles FMP, FM'P' donne

$$\frac{\mathrm{FM}'}{\mathrm{FM}} = \frac{\mathrm{M'P'}}{\mathrm{MP}} = \frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{OP'}}{\mathrm{OF}}.$$

En désignant par R le rayon du cercle et par ρ le rayon vecteur FM',

$$\rho = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{OF}} \times \mathrm{OP'}\ (1),\quad \text{d'où}\ \frac{\rho}{\mathrm{OP'}} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{OF}} = \text{const.}$$

Ainsi, comme nous l'avions déjà trouvé :

Une conique est le lieu des points dont les distances à un point et à une droite sont dans un rapport constant.

Le rayon vecteur FM s'obtient au moyen de l'abscisse OP′ de son extrémité, et est fonction *rationnelle* de cette abscisse, c'est-à-dire que son calcul n'exige l'extraction d'aucune racine, ce qui est la propriété *analytique* d'après laquelle on définit et on trouve les foyers.

Le plus grand et le plus petit rayon vecteur sont dirigés suivant l'axe focal. Évident par la valeur de ρ.

N. B. Le centre C de la conique est le transformé du pôle de l'axe des y par rapport au cercle.

126. Prenons le point F′ symétrique de F par rapport à C ; la conique sera aussi la transformée d'un cercle égal au premier, et ayant pour centre F′. Donc F′ sera un second foyer auquel correspondra une autre directrice O′y' telle que O′F′ = OF. Désignons par ρ' le rayon vecteur F′M′, on aura

$$\rho' = \frac{R}{OF} \times O'P'.$$

Pour l'ellipse, OP′ + O′P′ = OO′, et $\rho + \rho'$ étant constant :

L'ellipse est le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante.

Pour l'hyperbole, la différence étant constante :

L'hyperbole est le lieu des points dont la différence des distances à deux points fixes est constante.

Cela d'ailleurs résulte de ce que la conique est le lieu des points dont les distances à un point et à une droite sont dans un rapport constant.

Car, soit mm' un diamètre quelconque de l'ellipse ou de l'hyperbole, et fm, fm' les rayons vecteurs menés de l'un des foyers aux extrémités de ce diamètre (*fig.* 40), md et $m'd'$ étant les distances des extrémités du diamètre à la directrice :

$$\frac{fm}{md} = \frac{fm'}{m'd'} = \frac{fm \pm fm'}{md \pm m'd'} = \text{const.}$$

Or $md + m'd' = 2$ OC est constant pour l'ellipse, et $md - m'd'$ est constant pour l'hyperbole : donc $fm + fm'$ est constant pour la première courbe, et $fm - fm'$ est constant pour la seconde.

La somme ou la différence est évidemment égale à l'axe focal AA′.

Cela posé, considérons les deux foyers f, f'. La figure $fmf'm'$ étant un parallélogramme, $fm + f'm$ est constant pour l'ellipse, et $fm - f'm$ est constant pour l'hyperbole.

Il est facile, d'après cela, de construire ces courbes par points ou d'un mouvement continu. (Ellipse de Jardinier.)

127. *Principe de* PONCELET. — Nous avons vu que deux rayons vecteurs quelconques FM', FN' de la conique se coupent sous le même angle que les rayons correspondants FM, FN du cercle.

Donc : *Toutes les propriétés des angles au centre dans le cercle s'étendent aux angles qui ont leur sommet au foyer d'une conique, et le système des deux foyers a par rapport aux angles des propriétés analogues à celles qui ont lieu pour le centre du cercle supposé double.* (*Prop. proj.*, 275.)

Il sera souvent plus simple, dans les applications, de considérer le *centre* du cercle qui devient le *foyer* de la conique comme point de concours, ou *centre* d'homologie. Les points correspondants du cercle et de la conique seront en ligne droite avec ce centre. Le point à l'infini sur une droite correspondra au point où sa transformée coupe l'axe des y, qui devient la directrice de la conique.

Transformons ce théorème élémentaire :

La tangente au cercle est perpendiculaire au rayon.

La tangente au cercle devient une tangente à la conique qui a pour foyer le centre du cercle. En joignant le foyer au point où la tangente à la conique coupe la directrice, on a une droite parallèle à la tangente au cercle, et la droite qui joint le point de contact au foyer est dirigée suivant le rayon perpendiculaire à la tangente au cercle. Il en résulte ce nouveau théorème :

La partie d'une tangente quelconque d'une conique comprise entre le point de contact et la directrice est vue du foyer sous un angle droit.

Cette partie de la tangente à la conique correspond à la partie infinie de la tangente au cercle, à partir du point de contact, qui est vue du centre du cercle sous un angle droit.

Voici d'autres théorèmes que nous choisissons parmi les plus élémentaires du cercle, et vis-à-vis, ceux qui en résultent pour une conique, et dont il sera facile de trouver les énoncés.

La droite qui joint le centre d'un cercle au point de concours de deux tangentes est la bissectrice de l'angle des rayons menés aux points de contact.

La droite qui joint le foyer d'une conique au point de concours de deux tangentes est la bissectrice de l'angle des rayons recteurs menés aux points de contact.

La partie d'une tangente à un cercle comprise entre deux tangentes fixes est vue du centre sous un angle constant.

La partie d'une tangente à une conique comprise entre deux tangentes fixes est vue du foyer sous un angle constant.

Si la corde de contact des tangentes fixes passe par le centre, ces tangentes sont parallèles, et l'angle est droit.

Si la corde de contact des tangentes fixes passe par le foyer, ces tangentes se coupent sur la directrice, et l'angle est droit.

Des cercles concentriques se transforment en tout autant de coniques qui ont le même foyer et la même directrice.

En prenant une droite quelconque pour axe des y, et la parallèle passant par le centre commun, chacun des cercles se transformera en une conique qui aura ce centre pour foyer et l'axe des y pour directrice.

Lorsqu'un angle invariable tourne autour du centre d'un cercle, sa corde enveloppe un cercle concentrique, et le pôle de cette corde décrit un troisième cercle concentrique.

Lorsqu'un angle invariable tourne autour du foyer d'une conique, sa corde enveloppe une conique de même foyer et de même directrice, et le pôle de cette corde décrit une troisième conique de même foyer et de même directrice.

Étant donnés deux cercles concentriques, la corde de l'un qui est tangente à l'autre a son milieu au point de contact.

Étant données deux coniques de même foyer et de même directrice, la corde de l'une qui est tangente à l'autre a pour point de contact le conjugué harmonique de son intersection avec la directrice commune.

Les tangentes par un même point à une série de cercles concentriques ont les points de contact sur une

Les tangentes par un même point à une série de coniques de même foyer et de même directrice, ont les *circonférence qui passe par le point et par le centre commun.*

points de contact sur une conique qui passe par le point et par le foyer commun.

Ces exemples nous paraissent suffire pour faire comprendre l'importance du principe de Poncelet. Nous retrouverons d'ailleurs ce principe dans la théorie des polaires réciproques.

128. *Tangentes et normales. — La tangente et la normale en un point d'une conique divisent en parties égales les angles des rayons vecteurs.*

Soient FM, F'M (*fig.* 41) les rayons vecteurs menés à un point M d'une ellipse. Prolongeons un de ces rayons F'M d'une longueur MG égale à l'autre FM, et joignons FG. La bissectrice de l'angle au sommet du triangle isocèle FMG sera tangente à l'ellipse, car F'G = F'M + MG = F'M + FM = AA'. Tout autre point P de la bissectrice est extérieur à l'ellipse, puisqu'on aurait F'P + FP > AA'.

La tangente MT étant la bissectrice de l'angle FMG des rayons vecteurs, la normale MN, ou la perpendiculaire à la tangente, est la bissectrice de l'angle supplémentaire.

Pour l'hyperbole, on prendrait sur le plus grand rayon F'M une longueur MG égale à l'autre, et on verrait facilement que la tangente divise en parties égales l'angle même des rayons vecteurs.

Pour la parabole, un des foyers F' est à l'infini, et le rayon vecteur MF' est parallèle à l'axe. La tangente, comme dans l'ellipse, divise en parties égales le supplément de l'angle.

129. *Les pieds des perpendiculaires abaissées des foyers sur toutes les tangentes à une conique sont sur la circonférence qui a pour diamètre l'axe focal.*

Car la projection du foyer F sur la tangente MT est en H, milieu de la base du triangle isocèle FMG, et $CH = \frac{1}{2} F'G = \frac{1}{2} AA' = CA$. Celle du foyer F' est en H', milieu de la base du triangle isocèle F'MG', et

$$CH' = \tfrac{1}{2} FG' = \tfrac{1}{2} AA' = CA.$$

N. B. Cette circonférence est touchée en H par celle qui aurait pour diamètre le rayon vecteur FM, et en H′ par celle qui aurait pour diamètre l'autre rayon vecteur F′M. Donc :

La circonférence décrite sur l'axe focal d'une conique est tangente à toutes les circonférences qui ont pour diamètres les divers rayons vecteurs.

Pour la parabole, cette circonférence devient la tangente au sommet.

130. a, b étant les demi-axes de l'ellipse, projetons les foyers sur la tangente parallèle à l'axe focal. c désignant la distance CF du centre au foyer, que l'on appelle l'*excentricité*, on aura

$$b^2 + c^2 = a^2, \qquad \text{d'où} \qquad c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}.$$

a, b étant les demi-axes de l'hyperbole, le demi-axe b est égal à la partie AD de la tangente au sommet limitée par l'asymptote (*fig.* 42). Projetons le foyer F en K sur l'asymptote, qui est tangente à la courbe à l'infini ; les triangles rectangles CAD, CFK étant égaux, FK $=$ AD $= b$, et $c^2 = a^2 + b^2$, d'où $c = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$.

131. *Les points* T *et* N, *où la tangente et la normale en un point* M *de la conique coupent l'axe focal, sont conjugués harmoniques par rapport aux deux foyers.*

Car la tangente et la normale sont les bissectrices des angles des rayons vecteurs. Donc CT $\times$ CN $=$ CF², et il en résulte une nouvelle construction des foyers pour l'ellipse et l'hyperbole.

Pour la parabole, un des rayons étant parallèle à l'axe, le foyer F est le milieu de TN.

132. *La tangente et la normale aux divers points d'une conique donnent des divisions en involution sur chacun des axes.*

Car CT $\times$ CN $=$ CF² est constant.

Le point central est le centre de la conique, et les points doubles sont les foyers. Ainsi, la conique peut avoir quatre foyers, mais ils n'existent que lorsque les points doubles existent, ce qui exige que la tangente et la normale coupent l'axe d'un même côté du centre. Par conséquent :

Les foyers n'existent que sur le grand axe de l'ellipse, ou sur l'axe transverse de l'hyperbole.

Sur l'autre axe, les points T', N' d'intersection avec la tangente et la normale étant situés de part et d'autre, par rapport au centre, les points doubles sont *imaginaires*, et on dit aussi que les foyers le sont.

Pour la parabole, le centre de la courbe étant à l'infini, l'involution a un de ses points doubles à l'infini. L'autre point double divise en parties égales le segment compris sur l'axe entre la tangente et la normale en un point quelconque.

133. *Tangentes par un point extérieur.* — La tangente à la conique par un point extérieur Q (*fig.* 42) s'obtient en cherchant, ou le point G, ou le point H. Le point G est l'intersection de deux circonférences décrites, l'une avec FQ, l'autre avec $F'G = AA'$ pour rayon.

Le point H est l'intersection de la circonférence ayant pour diamètre l'axe focal AA', avec celle qui aurait pour diamètre FQ.

Au lieu des points G et H, on pourrait chercher les points G' et H'.

Il est facile de voir comment on construirait les tangentes parallèles à une droite, ou faisant un angle donné avec cette droite.

134. *Équation des courbes.* — Prenons pour axes deux diamètres conjugués quelconques AA', BB' d'une ellipse ou d'une hyperbole (*fig* 43). Soit MN une corde parallèle à BB', et P son milieu sur AA'. On aura, par le théorème de Newton,

$$\overline{PM}^2 = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{OA}^2} PA \times PA'.$$

Désignons par a, b les demi-diamètres conjugués, par y l'ordonnée PM et par x l'abscisse OP. Pour l'ellipse, $PA = a - x$, $PA' = a + x$, et $PA \times PA' = a^2 - x^2$, ce qui donne pour équation de cette courbe rapportée à deux diamètres conjugués ou à ses axes,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Si l'on prenait pour axes les diamètres conjugués égaux, l'équation aurait la forme de celle d'un cercle de rayon R, qui est $y^2 + x^2 = R^2$.

Ainsi : *Le cercle devient une ellipse lorsque toutes les ordonnées s'inclinent également.*

Pour l'hyperbole, $PA = x - a$, $PA' = x + a$, et $PA \times PA' = x^2 - a^2$, ce qui donne

$$a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2 ,$$

équation qui se déduit de celle de l'ellipse en changeant b^2 en $- b^2$.

Prenons pour axes un diamètre de la parabole et la tangente par son extrémité. PM et QN étant deux ordonnées quelconques (*fig.* 44), on aura par le théorème de Newton, en remarquant que les segments infinis disparaissent,

$$\frac{PM^2}{OP} = \frac{QN^2}{OQ} = \text{const.}$$

En représentant la constante par $2p$, on a pour équation de la parabole $y^2 = 2px$.

La constante $2p$ est appelée le *paramètre* de la parabole.

Supposons la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet.

Décrivons un cercle sur le paramètre $2p = OA$ comme diamètre. OM′ étant la corde qui correspond à l'abscisse OP, on aura $OM'^2 = 2px$. Donc $OM' = y = PM$, ce qui montre comment on pourrait construire la portion NON′ de la parabole, au moyen du cercle, en portant la longueur de la corde OM′ sur la direction de l'ordonnée. Pour le point N, l'ordonnée est égale au paramètre. Ainsi, pour déterminer le paramètre d'une parabole, il suffira de mener par le sommet une sécante ON inclinée à 45° sur l'axe, et de prendre l'ordonnée ou l'abscisse du point N.

135. *Similitude des coniques.* — On voit que, pour construire l'équation de l'ellipse ou de l'hyperbole, il faut se donner les longueurs a, b de deux diamètres conjugués, et l'angle sous lequel ils se coupent.

Par conséquent : *Deux ellipses ou deux hyperboles sont semblables lorsque deux diamètres conjugués sont proportionnels et se coupent sous le même angle,* car les deux courbes deviendraient superposables par un simple changement de l'échelle à laquelle on prend les longueurs des abscisses et des ordonnées pour les construire.

Les hyperboles dont les asymptotes se coupent sous le même angle sont semblables.

On verra facilement, par la similitude des triangles, que deux diamètres faisant des angles égaux avec l'une des asymptotes sont proportionnels.

Toutes les paraboles sont semblables, car pour construire la courbe il suffira de se donner le paramètre $2p$.

Il en est de même pour le cercle, et en général pour toutes les figures dont la détermination n'exige que la connaissance d'une longueur.

§ XIV. Cordes idéales des coniques.

136. Lemme. — *Une ellipse et une hyperbole qui ont deux diamètres conjugués communs AA' et BB' (fig. 45) se transforment réciproquement l'une en l'autre.*

On prendra les diamètres pour axes, et la tangente commune en A ou A' pour parallèle.

Une corde MN de l'ellipse se transforme en une corde parallèle M'N' de l'hyperbole, et λ désignant le rapport des carrés des demi-diamètres conjugués, on a, par le théorème de Newton,

$$PM^2 = \lambda PA \times PA' = \lambda (OA^2 - OP^2)$$
$$P'M'^2 = \lambda P'A \times P'A' = \lambda (OP'^2 - OA^2).$$

Pour une abscisse OP', plus grande que OA, PM^2 devient négatif, et on dit que la corde de l'ellipse est *imaginaire;* mais ce carré serait égal, abstraction faite du signe, à celui $P'M'^2$ de la demi-corde de l'hyperbole qui correspondrait à cette abscisse OP'.

Pour une abscisse OP plus petite que OA, $P'M'^2$ devient négatif, et on dit que la corde de l'hyperbole est imaginaire; mais ce carré serait égal, abstraction faite du signe, à celui PM^2 de la demi-corde de l'ellipse qui correspondrait à cette abscisse OP.

C'est ce qui conduisit Poncelet à prendre les cordes réelles de chacune des deux courbes pour représenter les cordes imaginaires de l'autre.

Comme la corde imaginaire conserve sa direction et a pour milieu le point réel où cette direction coupe le diamètre conjugué, Poncelet substitua la dénomination de cordes *idéales* à celle de cordes imaginaires, et appela les deux courbes *coniques supplémentaires*.

Une corde réelle MN de l'ellipse, par exemple, est la polaire d'un point extérieur P, et $PM^2 = \lambda PA \times PA'$. Une corde idéale M'N' de l'ellipse est la polaire d'un point intérieur P, et $P'M'^2 = \lambda P'A \times P'A'$. Ainsi, la corde se construit de la même manière, qu'elle soit réelle ou idéale. Pour l'obtenir, il suffit de connaître sa direction et son milieu P ou P' sur le diamètre conjugué. La transformation indique des constructions plus simples. Les tangentes par le milieu P' de la corde idéale forment, avec les tangentes en A et A', un trapèze CDGH dont les diagonales passent par les extrémités M', N' de la corde idéale. On obtient aussi les points M', N' en joignant MA et NA, ou MA' et NA'. Enfin, par les triangles semblables, $\frac{M'N'}{MN} = \frac{P'A}{PA}$.

137. *Une conique a une infinité de coniques supplémentaires.*

Car la conique supplémentaire est le lieu des extrémités de toutes les cordes idéales parallèles à une même direction.

Les coniques supplémentaires d'une ellipse sont des hyperboles, et réciproquement.

Les coniques supplémentaires d'un cercle sont des hyperboles équilatères, et réciproquement.

La demi-corde idéale d'un cercle est égale à la longueur de la tangente au cercle par le milieu de cette corde. Car alors $\lambda = 1$, et $P'M'^2 = P'A \times P'A'$ est le carré de la tangente au cercle par le point extérieur P'.

Il en résulte une construction par points de l'hyperbole équilatère au moyen du cercle qui aurait pour diamètre l'axe transverse.

Dans le cas de la parabole, $P'A = PA$, et $M'N' = MN$. Donc :

Les coniques supplémentaires d'une parabole sont des paraboles égales tournées en sens contraire par rapport à la tangente parallèle à la direction des cordes idéales.

138. *La demi-corde, réelle ou idéale, d'une conique est moyenne proportionnelle entre les segments que déterminent sur sa direction, à partir du diamètre conjugué, un point de cette direction et la polaire de ce point.*

Soit AB la direction de la corde (*fig.* 55), et O son intersection avec le diamètre conjugué. La polaire CD d'un point quelconque Q de AB passera par le pôle P de la corde AB, et coupera cette corde en R. PQ, PR étant deux droites conjuguées, $OQ \times OR$ sera constant.

Les points Q et R sont d'un même côté du point O si la corde est réelle, et de différents côtés si elle est idéale. Dans l'un et l'autre cas, Q et R sont des points homologues de deux divisions en involution, dont O est le centre, et les points doubles réels ou imaginaires sont les intersections de la conique avec la droite : donc $OQ \times OR$ est égal au carré de la demi-corde réelle ou idéale, *c. q. f. d.*

N.B. Poncelet considère l'axe radical de deux cercles comme une corde ou sécante commune qui est *idéale* lorsque les deux cercles n'ont pas de point commun.

La longueur de cette corde idéale est, comme on vient de le voir, le double de la tangente à l'un des cercles par le point où l'axe radical coupe la ligne des centres.

139. *Deux cercles quelconques ont pour sécante idéale commune la droite à l'infini.*

Car les coniques supplémentaires dont les cordes seraient perpendiculaires à la ligne des centres, sont des hyperboles équilatères ayant les asymptotes parallèles.

Ces hyperboles se coupent en deux points réels sur la droite à l'infini, et cette sécante commune *réelle* des hyperboles supplémentaires est une sécante commune *idéale* des deux cercles.

Ainsi : *Deux cercles qui n'ont pas de points réels communs ont deux cordes, ou sécantes, idéales communes*, qui sont leur axe radical et la droite à l'infini.

En d'autres termes : *Deux cercles quelconques ont toujours quatre points communs*, dont deux imaginaires situés à l'infini. Les deux autres sont tous les deux réels, ou tous les deux imaginaires.

Lorsque les deux coniques supplémentaires se touchent, on dit aussi que les cercles se touchent, mais que le contact est *idéal*.

140. *Deux ou plusieurs cercles concentriques ont un double contact idéal sur la droite à l'infini.*

Car les hyperboles supplémentaires qui correspondent à une direction quelconque ont les mêmes asymptotes ou les mêmes tangentes communes en deux points situés sur la droite à l'infini. Donc cette droite est une corde de double contact idéal pour les cercles.

141. *Tous les cercles situés dans un même plan ont les deux mêmes points imaginaires communs sur la droite à l'infini.*

Car toutes les hyperboles supplémentaires dont les cordes seraient perpendiculaires à des rayons parallèles de ces cercles, ayant leurs asymptotes respectivement parallèles, auront la droite à l'infini pour sécante *réelle* commune. Donc cette droite sera une sécante *idéale* commune à tous les cercles, et coupera chacun d'eux aux deux mêmes points imaginaires, que l'on appelle *points circulaires à l'infini.*

142. Afin de justifier ce que ces idées pourraient avoir d'étrange ou même de paradoxal, nous reproduirons le texte même de Poncelet pour les théorèmes analogues relatifs aux coniques. (*App. d'analyse et de géom.*, tom. II, pag. 374 et suivantes.)

Lorsqu'une ligne droite située dans le plan de deux coniques passe par deux points réels appartenant à la fois aux deux courbes, on dit qu'elle est *corde réelle commune* à ces deux courbes.

Nous dirons, par analogie, qu'une ligne droite située dans le plan de deux coniques sera *corde idéale commune* à ces deux courbes quand elle sera corde réelle commune aux deux supplémentaires qui lui correspondent.

Appelons M, N, P, Q quatre points appartenant à l'intersection mutuelle de deux sections coniques, et joignons ces points deux à deux par des lignes droites indéfiniment prolongées. On obtiendra six cordes communes à la fois aux deux courbes, qui seront telles que chacune d'entre elles en rencontrera une autre, et seulement une autre, au dehors du périmètre de ces courbes ; il y aura donc trois systèmes semblables de cordes communes qui formeront un quadrilatère ordinaire MNPQ avec ses deux diagonales.

Quand deux sections coniques seront telles que les supplémentaires se touchent en deux points réels sur une corde idéale commune aux deux proposées, la corde de contact de ces points pourra être considérée comme la réunion de deux cordes réelles communes aux supplémentaires, et par conséquent aussi comme la réunion de deux cordes idéales communes aux proposées. Il sera donc naturel de dire alors que les sections coniques données ont une corde *idéale de contact*; qu'elles se touchent en deux points *imaginaires* suivant cette même corde; qu'enfin ces deux courbes ont encore deux autres cordes communes, toutes deux imaginaires, et qui sont les tangentes aux points de contact en question.

Il sera facile de reconnaître, *à priori*, si deux des coniques sont entre elles en *contact idéal*, ou ont une corde idéale de contact commun. Car il suffira de tracer le diamètre qui passe à la fois par leurs centres, puis de décrire les coniques supplémentaires conjuguées à ce diamètre et aux deux courbes données, et de s'assurer ensuite, d'une façon ou d'une autre, qu'elles ont un double contact réel.

Deux hyperboles semblables et semblablement placées ont évidemment leurs asymptotes respectivement parallèles, et concourent par conséquent en deux points réels à l'infini, appartenant à la fois aux deux systèmes d'asymptotes dont il s'agit : donc *elles ont une corde réelle commune située à une distance infinie sur leur plan*.

Pareillement, quand deux ellipses sont semblables et semblablement placées, ou *s* et *s.p*, il existe une infinité de systèmes d'hyperboles supplémentaires conjuguées à une même direction des diamètres des ellipses proposées, et pour chacun de ces systèmes en particulier, les hyperboles supplémentaires sont évidemment *s* et *s.p*, et ont une corde commune à l'infini; donc aussi, les ellipses proposées ont une *corde idéale commune à l'infini*, c'est-à-dire, en d'autres termes, qu'elles peuvent être regardées comme ayant *deux points imaginaires en commun à l'infini*.

Ainsi : deux hyperboles ou deux ellipses *s* et *s.p* ont une corde commune à l'infini, qui est *réelle* pour les hyperboles et *idéale* pour les ellipses.

Si, au lieu de deux hyperboles ou de deux ellipses, on en considérait un nombre quelconque qui soient toutes *s* et *s.p*, on prouverait également qu'elles ont à l'infini une corde unique qui est à la fois commune à tout leur système; mais cette corde serait nécessairement *idéale* pour le système des ellipses.

Quand deux hyperboles *s* et *s.p* sont concentriques, elles ont évidemment mêmes asymptotes ou mêmes tangentes en deux points qui leur sont communs à l'infini : ainsi, elles se touchent en deux points réels, et par conséquent elles ont une corde réelle de contact, mais cette corde est entièrement à l'infini. Donc, deux ellipses qui sont concentriques, *s* et *s.p*, ont également une corde de contact commune à l'infini, mais qui est idéale ; et comme la même chose subsiste nécessairement pour un nombre quelconque d'ellipses ou d'hyperboles, on peut énoncer ce nouveau principe :

Le système d'un nombre quelconque d'hyperboles ou d'ellipses toutes concentriques s *et* s.p *a une corde de contact à l'infini commune à toutes les courbes du système, mais qui est réelle pour le système des hyperboles et idéale pour celui des ellipses.*

Les propositions réciproques résultent évidemment des principes mêmes qui viennent d'être posés. Ainsi, par exemple :

Si deux ou plusieurs sections coniques ont une corde commune, réelle ou idéale, située à l'infini, elles sont nécessairement s *et* s.p.

143. Il resterait à démontrer que *des coniques quelconques ont, pour des positions indéterminées, des cordes et des sécantes idéales communes, comme elles ont, pour de semblables positions, des points d'intersection réels et des cordes réelles également communes.*

Il serait surtout important de *trouver une construction simple et directe de la corde idéale commune à deux coniques.* (*Prop. proj.*, 57, 58, 59.)

Cette recherche se rattache au *principe de continuité*, qui résume la doctrine de Poncelet, mais qui ne saurait être compris ou exposé sans le secours de l'analyse.

§ XV. Transformation des coniques.

144. Lemme. — *Une conique se transforme en toute autre conique.*

Le pôle de la droite prise pour axe des y devient le centre, et les droites conjuguées qui se coupent au pôle deviennent les diamètres conjugués de la nouvelle courbe.

145. *Trouver les axes de la transformée.* 1° Si le pôle P de l'axe des y est intérieur à la conique donnée (*fig.* 33), la transformée sera une ellipse.

Soit E le point de concours. Deux droites conjuguées PQ, PR deviendront deux diamètres conjugués de l'ellipse, dont l'angle sera égal à QER. Ainsi :

On peut transformer une conique en une ellipse ayant deux diamètres conjugués qui se coupent sous un angle donné.

Le lieu du point E sera le segment de cercle décrit sur QR capable de cet angle, et, en passant de la transformation à la perspective, *le lieu de l'œil dans l'espace sera la surface de révolution engendrée par ce segment de cercle tournant autour de* QR.

Supposons le cercle de la *fig.* 55 remplacé par une conique.

Soit O′ le point où l'axe des y est coupé par le diamètre conjugué de sa direction, et O′E′ l'ordonnée de la demi-circonférence décrite sur QR comme diamètre. O′E′ sera la longueur de la demi-corde idéale de la conique dirigée suivant l'axe des y, et on aura $O'E'^2 = O'Q \times O'R$. Décrivons une circonférence passant par E et E′, dont le centre soit sur l'axe des y, et soient Q′, R′ les points où elle coupe cet axe. On aura

$$O'Q' \times O'R' = O'Q \times O'R = O'E'^2.$$

PQ′ et PR′ seront deux droites conjuguées, et l'angle Q′ER′ des transformées étant droit, ces transformées seront les axes de l'ellipse.

Le lieu de l'œil dans l'espace sera la circonférence décrite par le point E *dans un plan perpendiculaire à l'axe des* y.

Si le point E coïncide avec E′, tous les diamètres conjugués de la transformée seront rectangulaires, ce qui est la propriété caractéristique du cercle. Donc :

Une conique se transforme en un cercle, si l'on prend pour axe des y *une corde idéale, pour axe des* x *la perpendiculaire par son milieu, et pour distance de la parallèle la demi-corde idéale.*

Le lieu de l'œil dans l'espace est la circonférence décrite du milieu de la corde idéale avec un rayon égal à la moitié de cette corde, et dans un plan qui lui soit perpendiculaire. (*Prop. proj.*, 110.)

En d'autres termes : *Toute conique se transforme en un cercle, si l'on prend pour axe des* y *une droite quelconque qui ne rencontre pas la conique, pour axe des* x *la perpendiculaire au point où la droite est coupée par le diamètre conjugué, et pour distance de la parallèle la* *moyenne proportionnelle entre les segments, déterminés, de part et d'autre de l'origine, par un point* Q *de la droite et la polaire* PR *de ce point.*

2° Si le pôle P de l'axe des y est extérieur, la transformée sera une hyperbole. Soient A et B les intersections de la conique avec l'axe des y, et E le point de concours (*fig.* 35). Les tangentes PA, PB deviendront les asymptotes de l'hyperbole, faciles à construire, car elles ont pour directions EA et EB, et passent par les points où ces tangentes coupent la parallèle. Les axes seront les bissectrices de leurs angles.

Ou bien, les bissectrices des angles que font EA et EB coupent l'axe des y en Q′ et en R′, conjugués harmoniques sur la corde AB. Donc PQ′ et PR′ sont les droites conjuguées qui se transformeront en axes de l'hyperbole, et celle qui coupe la conique deviendra l'axe transverse.

Si l'on veut que l'angle des asymptotes soit égal à un angle donné, on prendra le point E sur un segment de cercle décrit sur AB, et capable de cet angle.

Le lieu de l'œil dans l'espace sera la surface de révolution engendrée par ce segment tournant autour de AB.

Si l'on veut que l'hyperbole soit équilatère, on prendra le point E sur la circonférence décrite sur AB comme diamètre.

Le lieu de l'œil sera la surface de la sphère ayant AB *pour diamètre.*

3° Si le pôle P de l'axe des y est sur la conique, cet axe sera la tangente en ce point, et on aura pour transformée une parabole. Soit E le point de concours (*fig.* 38); EP sera la direction commune des diamètres de la parabole, et la perpendiculaire EA celle de la tangente au sommet.

Menons par le point A une tangente AN à la conique. NP et NA seront deux droites conjuguées qui se transformeront en axe de la parabole et en tangente au sommet.

Si l'on veut que NP et NA se transforment en un diamètre et en une tangente par son extrémité qui se coupent sous un angle donné, le lieu du point E sera le segment de cercle décrit sur AP, et capable de cet angle. *Le lieu de l'œil dans l'espace sera la surface de révolution engendrée par ce segment tournant autour de* AP.

146. *Transformer une conique en un cercle, de manière qu'un point intérieur* P *devienne le centre du cercle.*

On prendra pour axe des y la polaire du point P, qui sera une droite extérieure à la conique, et on opérera comme on vient de l'indiquer.

Si le point P est le foyer de la conique, l'axe des y est la polaire focale ou la directrice, et on retrouve le *principe* de Poncelet.

147. *Transformer une conique en une autre, de manière qu'un point intérieur* F *devienne le foyer de la nouvelle courbe.* Prenons pour axe des y une droite qui ne soit point la polaire du point F. Les droites conjuguées se coupant en F donneront des segments en involution sur l'axe des y, et, les points doubles étant imaginaires, toutes les circonférences décrites sur ces segments, comme diamètres, auront une même corde commune perpendiculaire sur l'axe des y, et dont le milieu sera sur cet axe. Une des extrémités de cette corde étant le point de concours, les droites conjuguées qui se coupent en F se transformeront en droites conjuguées se coupant en F′, et qui seront toutes rectangulaires : donc F′ sera un foyer de la nouvelle courbe, *ellipse*, *hyperbole* ou *parabole*, suivant que l'axe des y sera extérieur à la conique donnée, sécant ou tangent.

N. B. Si l'axe des y était la polaire du point F, le point F′ deviendrait à la fois le foyer et le centre de la nouvelle courbe, qui serait un cercle.

148. *Transformer une conique en une autre, de manière qu'un point intérieur* F *devienne le foyer, et un autre point* P *le centre de la nouvelle courbe.*

On prendra pour axe des y la polaire du point P, et on trouvera le point de concours par la condition que F devienne le foyer.

149. *Transformer une conique en une autre, de manière que deux points intérieurs* F, F′ *deviennent les foyers de la nouvelle courbe.*

La droite FF′ coupera la conique en A, A′. Il existe deux points qui divisent harmoniquement chacun des segments FF′ et AA′, dont l'un P est intérieur. On prendra la polaire de P pour axe des y, et on déterminera le point de concours par la condition que F devienne un foyer. P deviendra à la fois le centre de la nouvelle courbe et le milieu des transformées de F et de F′. Comme F devient un foyer, F′ deviendra l'autre foyer.

150. *Transformer une conique en une parabole, de manière qu'un point* *intérieur* F *devienne le foyer, et un point* A *de la courbe le sommet de la parabole.*

FA coupera la conique en un second point A', et on prendra pour axe des y la tangente en A'. (Chasles; *Coniques*, pag. 116.)

151. *Des coniques qui ont une corde commune se transforment en tout autant de coniques* s *et* s.p.

Prenons la corde commune pour axe des y, et soit E le point de concours.

1° Si la corde est réelle, les transformées seront des hyperboles ayant leurs asymptotes parallèles;

2° Si la corde est idéale, les transformées seront des ellipses ayant leurs asymptotes imaginaires parallèles;

3° Si la corde est nulle, les transformées seront des paraboles ayant leurs axes parallèles.

Par conséquent, dans tous les cas, les transformées seront des coniques *s* et *s.p.*

152. *Des coniques qui ont une corde idéale commune se transforment en tout autant de cercles.*

On prendra pour axe des y la corde idéale, pour axe des x la perpendiculaire en son milieu, et pour distance de la parallèle la moitié de la corde idéale.

153. *Des coniques qui ont un double contact se transforment en tout autant de coniques* s et s.p *ayant même centre.*

On prendra la corde de contact pour axe des y, ce qui donnera des coniques *s* et *s.p.* Comme la corde de contact a évidemment le même pôle par rapport à chacune des coniques, ce pôle deviendra le centre commun des transformées.

154. *Des coniques qui ont un double contact idéal se transforment en tout autant de cercles concentriques.*

On prendra pour axe des y la corde idéale de contact, pour axe des x la perpendiculaire en son milieu, et pour distance de la parallèle la moitié de la corde idéale. Le pôle commun de l'axe des y deviendra le centre commun des cercles résultant de la transformation.

155. *Des coniques circonscrites à un même quadrilatère se transforment en tout autant de coniques concentriques dont les axes ont les mêmes directions.*

On prendra pour axe des y la troisième diagonale du quadrilatère. Le point où se coupent les deux autres étant le pôle de l'axe des y par rapport à chacune des coniques, deviendra le centre commun des transformées qui seront circonscrites à un même parallélogramme. Donc les axes seront dirigés suivant les parallèles également distantes des côtés du parallélogramme.

En déterminant le point de concours de manière que l'une des coniques devienne un cercle :

Des coniques circonscrites à un même quadrilatère se transforment en un cercle et en coniques qui ont pour centre commun celui de ce cercle.

156. *Deux coniques s et s.p ou homothétiques jouissent de toutes les propriétés de deux cercles.* En effet :

Une conique se reproduit en prenant pour point de concours un point qui ne soit pas sur la courbe, et pour parallèle la polaire de ce point.

Il en résulte ce lemme :

Une conique se transforme en une conique homothétique, si l'on prend pour point de concours un point qui ne soit pas sur la courbe, et pour parallèle une parallèle à la polaire de ce point.

Et cette conséquence :

Deux coniques homothétiques se transforment l'une en l'autre en prenant pour point de concours celui de leurs tangentes extérieures ou intérieures communes, et pour parallèle la parallèle à égale distance des cordes de contact de ce point.

Il sera donc facile de refaire le § XII pour le cas de deux coniques homothétiques. (Voir le *Mémoire* de M. Chasles, *Ann.* de Gergonne, tom. XVIII.)

M. Chasles appelle axe de *symptose* la droite analogue à l'axe *radical*, et qui est aussi la parallèle également distante des polaires de similitude directe et des polaires de similitude inverse des deux coniques homothétiques. Lorsque ces coniques n'ont aucun point réel, cet axe est une corde idéale commune.

§ XVI. Théorie des polaires réciproques.

157. Lemme. — *Tout point d'un plan a une polaire et toute droite de ce plan a un pôle, par rapport à un cercle ou à une conique.*

Une figure quelconque pourra donc se transformer au moyen du cercle, ou de la conique, en une nouvelle figure dont les *points* correspondront à des *droites*, et dont les *droites* correspondront à des *points* de la première.

Nous allons étudier ce nouveau mode de transformation, que l'on doit aussi à Poncelet.

Soit un polygone dont les côtés A, B, C, D, ... ont pour pôles respectifs $a, b, c, d\ldots$; ces pôles seront les sommets d'un nouveau polygone dont les côtés auront réciproquement pour pôles les sommets du premier. En effet, le côté ab, par exemple, du second polygone, passant par les pôles des côtés A, B du premier, aura pour pôle l'intersection de ces côtés.

Ainsi, on peut obtenir chacun de ces polygones au moyen de l'autre, soit en prenant les pôles des côtés, soit en prenant les polaires des sommets, par rapport au cercle ou à la conique qui sert à opérer la transformation et qu'on appelle la *directrice*.

Le lieu des pôles des tangentes en chacun des points d'une courbe C sera une nouvelle courbe C', à laquelle seront tangentes les polaires des divers points de la première.

Car m, n étant les points de contact de deux tangentes consécutives de C, et m', n' les pôles de ces tangentes, la corde $m'n'$ sera la polaire du point d'intersection des tangentes en m et en n, et lorsque ces points se réuniront en un seul, la corde $m'n'$ deviendra tangente à la courbe C', que l'on pourra aussi considérer comme l'enveloppe des polaires des divers points de C.

On verrait de même que C peut être considérée, soit comme le lieu des pôles des tangentes de C', soit comme l'enveloppe des polaires des divers points de C'.

Les points d'intersection de l'une des courbes par une droite donnent tout autant de tangentes de l'autre, qui se coupent au pôle de la droite. Le nombre de ces tangentes, issues d'un même point, indique ce qu'on appelle la *classe* de la courbe, et on sait que le nombre des intersections de la courbe avec une droite indique le *degré*. Par conséquent :

Le degré de l'une des courbes est égal à la classe de l'autre.

Les coniques sont à la fois des courbes du second degré et de la seconde classe, puisqu'il existe deux tangentes par le même point ; mais pour les courbes de degré supérieur, la *classe* de la courbe peut différer de son *degré*.

Par exemple, les courbes du troisième degré peuvent être de la sixième classe, car il peut exister six tangentes par un même point. Mais parmi ces courbes, il en est qui sont d'une classe inférieure, et d'autres qui sont de la troisième classe.

158. Deux figures telles que les points de l'une ont pour polaires les droites de l'autre, et réciproquement, sont dites *polaires réciproques*. Donc :

La polaire réciproque d'une conique est une autre conique.

159. On prend le plus ordinairement un cercle pour directrice, et il suffit de se donner son centre et son rayon pour trouver la polaire réciproque d'une figure quelconque. Car le pôle d'une droite est sur la perpendiculaire abaissée du centre sur la droite, et le produit des distances du pôle et de la polaire au centre est égal au carré du rayon.

N. B. Si le rayon du cercle varie, la position seule de la polaire réciproque est altérée.

160. *La polaire réciproque d'un cercle concentrique au cercle directeur est un autre cercle concentrique.* Soit CA un rayon du cercle directeur coupant en B un cercle concentrique (*fig.* 45). La tangente en B aura pour pôle un point B′ de CA, tel que $CB \times CB' = CA^2$. CB′ étant constant, le lieu du point B′ est une circonférence concentrique.

161. *La polaire réciproque d'un cercle quelconque est une conique.*

Ellipse : Si le centre du cercle directeur est intérieur au cercle donné, car aucune des tangentes au cercle donné n'aura son pôle à l'infini.

Hyperbole : Si le centre est extérieur, car les tangentes menées par ce point au cercle donné auront leurs pôles à l'infini.

Parabole : Si le centre est sur la circonférence du cercle donné, car la tangente en ce point, au cercle donné, aura son pôle à l'infini.

N. B. Il en serait de même si l'on prenait pour directrice une conique.

162. Supposons une figure quelconque et sa polaire réciproque, que l'on pourra toujours construire au besoin.

Les *points* de l'une des figures correspondront à des *droites* de l'autre, et réciproquement.

A un *polygone*, correspondra un *polygone polaire réciproque* d'un même nombre de côtés.

A une *courbe* d'un *degré* quelconque, correspondra une *courbe* de la même *classe*, et réciproquement.

A un polygone *inscrit* ou *circonscrit* à une courbe, correspondra un polygone *circonscrit* ou *inscrit* à la polaire réciproque de la courbe.

Au *lieu géométrique d'un point*, correspondra la *courbe enveloppe d'une droite*, polaire du point, et réciproquement.

A des *points en ligne droite* de l'une des figures, correspondront *tout autant de droites se coupant au même point* dans la nouvelle figure, et réciproquement.

A des *points en ligne droite sur une courbe*, correspondront *tout autant de tangentes issues d'un même point* à la nouvelle courbe, et réciproquement.

A un *point commun à deux courbes*, correspondra une *tangente commune aux polaires réciproques de ces courbes*.

Donc : *Si deux courbes se touchent en un ou plusieurs points*, *les polaires réciproques se toucheront en tout autant de points*, car un point de contact devient une tangente commune, et la tangente en ce point devient le point de contact de la nouvelle tangente, etc., etc.

Par conséquent : *A toute propriété descriptive de l'une des figures, correspondra une propriété descriptive de l'autre figure.*

On trouvera facilement le nouvel énoncé d'après ce qui précède. Il suffira de changer les mots *points* et *droites* en *droites* et *points* ; *degré* et *classe* en *classe* et *degré ; inscrit* et *circonscrit* en *circonscrit* et *inscrit*, etc. C'est en cela que consiste le principe de la *dualité*, que les propriétés réciproques du pôle et de la polaire dans le cercle avaient conduit Gergonne à émettre, mais qui n'a été pleinement justifié que par la théorie des polaires réciproques de Poncelet.

Si l'on modifie l'une des figures, et qu'il en résulte de nouvelles propriétés descriptives ; si l'on suppose, par exemple, que l'un des points coïncide avec un ou plusieurs autres, qu'il passe à l'infini, qu'il décrive une droite ou une courbe, etc., il en résultera de nouvelles propriétés *corrélatives* pour l'autre figure, ce qui permettra, suivant la piquante expression de Gergonne, de *faire de la géométrie en partie double.*

Pour bien comprendre toute l'importance du principe de la dualité, supposons le théorème de Pascal découvert de nos jours. On en conclurait immédiatement le théorème corrélatif de Brianchon, et c'est précisément par les propriétés réciproques des pôles et polaires que Brianchon le découvrit près de deux siècles après la mort de Pascal. En effet, la polaire réciproque d'un hexagone inscrit à une conique est un hexagone circonscrit à une conique, et les côtés opposés du premier deviennent les diagonales qui joignent les sommets opposés du second.

En supposant les deux théorèmes inconnus, la découverte de l'un révèlerait immédiatement l'existence de l'autre.

Le théorème de Pascal, ayant lieu quelle que soit la longueur des côtés de l'hexagone inscrit, subsiste si un ou plusieurs des côtés deviennent nuls, ou de sécants deviennent tangents, ce qui donne des théorèmes sur le pentagone, le quadrilatère et le triangle *inscrits* à une conique, qui ont pour corrélatifs des théorèmes sur le pentagone, le quadrilatère et le triangle *circonscrits.*

De même, le théorème de Brianchon reproduit celui de Pascal ; et comme il a lieu quels que soient les angles de l'hexagone circonscrit, il subsiste en supposant un ou plusieurs des angles égaux à deux droits, ou en remplaçant deux côtés consécutifs par une tangente ; ce qui reproduit les théorèmes sur le pentagone, le quadrilatère et le triangle *circonscrits*, et par suite les théorèmes sur le pentagone, le quadrilatère et le triangle *inscrits.*

Voici le tableau de ces théorèmes corrélatifs.

Dans tout hexagone inscrit à une conique, les côtés opposés se coupent en trois points situés sur la même droite.	*Dans tout hexagone circonscrit à une conique, les diagonales qui joignent les sommets opposés se coupent au même point.*

Si un côté de l'hexagone inscrit est remplacé par une tangente, on a un pentagone inscrit ayant pour sommet le point de contact de la tangente, et il en résulte ce double théorème, que l'on retrouverait en supposant que l'un des angles de l'hexagone circonscrit fût égal à deux droits :

Dans tout pentagone inscrit à une conique, le point de concours de la tangente par un sommet et du côté opposé et les points de concours des autres côtés non consécutifs, sont trois points en ligne droite.

Dans tout pentagone circonscrit à une conique, la droite qui joint un sommet au point de contact du côté opposé et les diagonales qui joignent les autres sommets non consécutifs, se coupent au même point.

Si un second côté de l'hexagone devient tangent, on a un quadrilatère inscrit et des tangentes par deux des sommets qui peuvent être adjacents ou opposés. Donc :

Dans tout quadrilatère inscrit à une conique, si l'on mène des tangentes par deux sommets adjacents, le point de concours de chacun avec le côté passant par le point de contact de l'autre et le point de concours des deux autres côtés, sont trois points en ligne droite.

Dans tout quadrilatère circonscrit à une conique, si l'on prend les points de contact de deux côtés adjacents, et que l'on joigne le point de contact de chaque côté avec le sommet de l'autre côté et les deux autres sommets opposés, on aura trois droites se coupant au même point.

Dans tout quadrilatère inscrit à une conique, les points de concours des tangentes par les sommets opposés et les points de concours des côtés opposés sont quatre points en ligne droite.

Dans tout quadrilatère circonscrit à une conique, les deux diagonales et les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés sont quatre droites qui se coupent en un même point.

Enfin, si un troisième côté de l'hexagone devient tangent, on a un triangle inscrit et trois tangentes par les sommets. Donc :

Dans tout triangle inscrit à une conique, les points de concours de chaque côté avec la tangente menée

Dans tout triangle circonscrit à une conique, les droites qui joignent le point de contact de chaque côté *par le sommet opposé sont trois points en ligne droite.* *avec le sommet opposé se coupent au même point.*

163. La transformation des propriétés métriques s'effectue en vertu de ces principes.

1° *L'angle de deux droites est égal à celui des rayons du cercle directeur qui passent par les pôles de ces droites.*

Car ces rayons sont respectivement perpendiculaires à ces droites.

2° *Le rapport des distances de deux points au centre du cercle directeur est égal à celui des distances de chacun de ces points à la polaire de l'autre.*

Soit O le centre du cercle directeur, R son rayon, A et B deux points, et PA′, QB′ leurs polaires respectivement perpendiculaires à OA et à OB (*fig.* 46). $OA \times OA' = R^2 = OB \times OB'$, d'où $\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$. Abaissons du point A la perpendiculaire AC sur OB, et du point B la perpendiculaire BD sur OA. Les triangles OAC, OBD étant semblables, $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$. Donc $\frac{OC}{OD} = \frac{OB'}{OA'} = \frac{OB' - OC}{OA' - OD} = \frac{CB'}{DA'} = \frac{AM}{BN}$, et par suite $\frac{OA}{OB} = \frac{AM}{BN}$, *c.q.f.d.* Ce théorème est dû au géomètre anglais Salmon.

3° *La polaire réciproque d'un cercle quelconque est une conique qui a pour foyer le centre du cercle directeur, et pour directrice la polaire du centre du cercle donné par rapport au cercle directeur.*

Soit O le centre du cercle directeur, et PQ la polaire du centre C d'un autre cercle (*fig.* 47). Une tangente MT à cet autre cercle a pour pôle un point m situé sur la perpendiculaire OT à la tangente MT, et tel que $Om \times OT = R^2$. Les deux points C et m ayant pour polaires par rapport au cercle directeur les droites PQ et MT, on a par le théorème précédent $\frac{Om}{OC} = \frac{mn}{CM}$, ou $\frac{Om}{mn} = \frac{OC}{CM}$. Le second membre étant constant, le lieu du point m, polaire réciproque du cercle C, est une conique qui a pour foyer O, et pour directrice PQ. *c. q. f. d.*

Cor. — *Des cercles se transforment en coniques de même foyer.*

Des cercles concentriques se transforment en coniques qui ont le même foyer et la même directrice.

Deux rayons quelconques d'un cercle ayant leurs pôles sur les perpendiculaires par le foyer de la conique qui résulte de la transformation du cercle, nous retrouvons le principe de Poncelet :

Toutes les propriétés des angles au centre dans le cercle, s'étendent aux angles qui ont leur sommet au foyer d'une conique.

4° *La distance d'un point au centre du cercle directeur*, en supposant son rayon égal à l'unité, *devient l'inverse de la distance de sa polaire à ce centre.*

Car A étant le point, et A′ celui où sa polaire coupe le rayon dirigé suivant OA, $OA \times OA' = R^2 = 1$, d'où $OA = \frac{1}{OA'}$.

5° Les segments d'une droite quelconque se transforment en vertu de ce théorème dû à M. Mannheim, professeur à l'École Polytechnique :

(*Transformation des propriétés métriques des figures à l'aide de la théorie des polaires réciproques*, 1857.)

Soit ab *un segment d'une droite* M *dont le pôle est* m, *et* A,B *les polaires de* a,b *qui se couperont en* m (*fig.* 48). *Menons par le centre* O *du cercle directeur une droite quelconque* D *coupant les polaires en* c, d ; *on aura*

$$ab = \left(\frac{1}{Od} - \frac{1}{Oc}\right) \times \frac{1}{\sin dOm}.$$

En effet, projetons le segment ab sur la droite D en $c'd'$; ce qui donne $c'd' = ab \cos(M,D)$. $\cos(M,D) = \sin(M,ac') = \sin dOm$, car Om et Od sont respectivement perpendiculaires à M et à ac'. Donc $ab = \frac{c'd'}{\sin dOm}$; mais la droite bd' passant par b a son pôle sur B. Comme D est perpendiculaire sur bd', ce pôle est le point d, et $Od' \times Od = 1$. De même la droite ac' a pour pôle c, et $Oc \times Oc' = 1$. Donc $c'd' = Od' - Oc' = \frac{1}{Od} - \frac{1}{Oc}$;

et par suite $ab = \left(\frac{1}{Od} - \frac{1}{Oc}\right) \times \frac{1}{\sin dOm}$. (1)

N. B. On donne le même signe aux segments de même direction et des signes contraires aux segments de direction contraire. Dans l'expression de ab, on commence par l'inverse du segment Od terminé à la polaire B de l'autre extrémité de ab. Par conséquent on aurait

$$ba = \left(\frac{1}{Oc} - \frac{1}{Od}\right) \frac{1}{\sin dOm}.$$

Soit pf une parallèle à D coupant A et B en e et f,

$$\frac{Od}{pf} = \frac{Om}{pm} = \frac{Oc}{pe}; \text{ d'où } \frac{1}{Od} = \frac{pm}{Om} \times \frac{1}{pf}, \text{ et } \frac{1}{Oc} = \frac{pm}{Om} \times \frac{1}{pe}.$$

$$\text{Par suite, } ab = \frac{pm}{Om}\left(\frac{1}{pf} - \frac{1}{pe}\right) \times \frac{1}{\sin fpm}. \qquad \text{(II)}$$

Si la transversale pf est perpendiculaire sur Om, $\sin fpm = 1$, et

$$ab = \frac{pm}{Om}\left(\frac{1}{pf} - \frac{1}{pe}\right). \qquad \text{(III)}$$

Si la transversale est parallèle à A, le point e passe à l'infini, et

$$ab = \frac{pm}{Om} \times \frac{1}{pf} \times \frac{1}{\sin fpm}. \qquad \text{(IV)}$$

Si la transversale passe par le centre O du cercle directeur, $Om = pm$, et les formules se simplifient.

On trouve dans le curieux Mémoire de M. Mannheim dix-huit expressions du segment ab qui ne sont que des formes différentes de la formule (II), la plus importante, et l'on y voit comment la théorie des polaires réciproques conduit à celle des divisions homographiques.

De la formule (I) résulte ce théorème :

Étant donné un angle (A,B) *et un point* O *dans son plan, si par ce point on mène une transversale* D *coupant les côtés de l'angle en* c *et* d, on aura

$$\left(\frac{1}{Od} - \frac{1}{Oc}\right) \times \frac{1}{\sin dOm} = \text{const.}$$

Il est facile de le démontrer *à priori*. Car dans le triangle cdm, on a $\frac{cd}{md} = \frac{\sin Bmc}{\sin mcO}$. Dans le triangle mOd, $\frac{md}{Od} = \frac{\sin dOm}{\sin OmB}$. Dans le triangle cmO, $\frac{mO}{Oc} = \frac{\sin mcO}{\sin Omc}$. Multipliant et réduisant

$$\frac{cd}{Od.Oc} \times \frac{1}{\sin dOm} = \text{const.},$$

qui est la formule à démontrer, à cause de $cd = Oc - Od$.

(II) donne cet autre théorème, tout aussi facile à démontrer *à priori*.

Trois droites A, B, S *se coupant au même point* m, *si l'on mène une transversale coupant ces droites en* e, f, p, on aura

$$mp\left(\frac{1}{pf} - \frac{1}{pe}\right) \times \frac{1}{\sin fpm} = \text{const.}$$

6° *Transformer la distance d'un point* m *à une droite* A. Soit p le pied de la perpendiculaire B abaissée de m sur A (*fig.* 49). Il s'agit de transformer le segment mp. M étant la polaire de m, celle de p passera par le pôle a de A, et par le pôle b de la perpendiculaire B. Or ce pôle se trouvera sur Ob perpendiculaire à Oa et sur M. Donc ba est la polaire P de p, et on aura $pm = \frac{1}{Oc} - \frac{1}{Oa}$. Par conséquent, il est inutile de chercher P, et il suffit de joindre le centre O du cercle directeur au pôle a de la droite A. Cette ligne coupera la polaire M de m en c, et il en résultera pm.

7° *Quatre points situés sur une droite se transforment en un faisceau de quatre droites qui ont même rapport anharmonique.*

Car le faisceau a pour origine le pôle de la droite, et ses rayons sont respectivement perpendiculaires à ceux du cercle directeur qui passent par les quatre points de la droite.

Réciproquement : *Un faisceau de quatre droites se transforme en quatre points situés sur la polaire de l'origine du faisceau, et qui ont même rapport anharmonique.*

Donc : *Deux divisions homographiques se transforment en deux faisceaux homographiques, et réciproquement.*

Deux divisions en involution se transforment en deux faisceaux en involution, et réciproquement.

La transformation des théorèmes est en outre facilitée par ces remarques.

O étant le centre du cercle directeur, et S, S′ deux courbes polaires réciproques, deux points a, b de S ont pour polaires deux tangentes A′, B′ de S′, qui sont respectivement perpendiculaires à Oa, Ob. Les points de contact a', b' de ces tangentes ont réciproquement pour polaires A, B, tangentes à S en a,b. La corde C des tangentes A, B a pour pôle le point de concours c' des tangentes A', B', et réciproquement la corde C' des tangentes A', B' a pour pôle le point de concours c des tangentes A, B.

Si S est une conique, la polaire réciproque S' est une autre conique, et on a ce théorème :

Un point et sa polaire, par rapport à une conique, se transforment en une droite et en pôle de cette droite, par rapport à la nouvelle conique.

164. Transformons les théorèmes les plus élémentaires du cercle.

La tangente au cercle est perpendiculaire au rayon mené au point de contact.

Le pôle de la tangente au cercle est un point d'une conique qui a pour foyer le centre O du cercle directeur, et pour directrice la polaire du centre du cercle donné. Le pôle du rayon perpendiculaire est l'intersection de la polaire du centre (directrice) avec la polaire du point de contact (tangente à la conique). Les deux pôles sont vus du foyer O sous un angle égal à celui de la tangente avec le rayon perpendiculaire.

Donc : *Un point d'une conique et le point où sa tangente coupe la directrice sont vus du foyer sous un angle droit.*

Deux tangentes A et B à un cercle font des angles égaux avec la corde de contact C de ces tangentes.

La droite menée du foyer au point de concours de deux tangentes à une conique est la bissectrice de l'angle des rayons vecteurs menés aux deux points de contact.

A et B ont pour pôles les points de contact a,b de deux tangentes à une conique qui a pour foyer le centre O du cercle directeur. C a pour pôle le point de concours c de ces tangentes. Donc l'angle $(A,C) = aOc$, l'angle $(B,C) = bOc$; et comme $(A,C) = (B,C)$, l'angle $aOc = bOc$.

Lorsque le centre O du cercle directeur est sur la circonférence du cercle que l'on transforme, la polaire réciproque est une parabole.

Les cordes d'un cercle vues d'un point de la circonférence sous le même angle, enveloppent un cercle concentrique.

Le lieu du sommet d'un angle constant circonscrit à une parabole est une conique qui a le même foyer et la même directrice.

Les extrémités d'une corde ont pour polaires deux tangentes à la parabole perpendiculaires aux côtés de l'angle sous-tendu par la corde, et cette corde a pour pôle le point de concours de ces tangentes.

Les projections d'un point O d'une circonférence sur les côtés d'un triangle inscrit ABC *sont trois points en ligne droite.*

(Proposition connue.)

Les perpendiculaires élevées par les sommets d'un triangle circonscrit à une parabole sur les droites qui joignent ces sommets au foyer, se coupent au même point.

Le pied D de la perpendiculaire abaissée du point O sur le côté AB a pour polaire la ligne des pôles de OD et de AB. Le pôle de AB est le point de concours *c* de deux tangentes à la parabole. OD, qui passe par le centre, a son pôle à l'infini sur le rayon perpendiculaire. Comme les deux pôles sont vus du foyer O sous un angle droit, la polaire de OD est la perpendiculaire élevée par *c* à la ligne O*c* qui joint ce point au foyer.

E étant le point où se coupent les trois perpendiculaires, la circonférence qui aurait OE pour diamètre passera par les trois sommets du triangle circonscrit à la parabole.

Donc : *Les trois sommets d'un triangle circonscrit à une parabole sont sur une circonférence qui passe par le foyer.*

Par conséquent : *Le lieu des foyers de toutes les paraboles tangentes à trois droites est une circonférence.*

Le lieu des points par lesquels on peut mener à un cercle des tangentes qui se coupent sous le même angle, est un cercle concentrique.

L'enveloppe des cordes d'une conique qui sous-tendent le même angle au foyer est une conique qui a même foyer et même directrice.

L'enveloppe des cordes de contact de ces tangentes est un autre cercle concentrique.

Le lieu des points de concours des tangentes par les extrémités de ces cordes est une autre conique qui a même foyer et même directrice.

Si par un même point on mène des tangentes à des cercles concentriques, les points de contact sont sur une circonférence passant par

Si par les intersections d'une droite avec des coniques de même foyer et de même directrice on mène des tangentes à ces courbes, ces *le point et par le centre commun de ces cercles.*

tangentes enveloppent une conique de même foyer tangente à la droite et à la directrice commune.

165. L'existence d'un théorème sera indiquée par celle du théorème corrélatif : on aura le choix entre la démonstration de l'un ou de l'autre, et l'on pourra s'aider en outre de la transformation de la figure.

Soit, par exemple, le théorème de Desargues et son corrélatif :

Les six points où une transversale coupe les côtés opposés d'un quadrilatère inscrit à une conique sont en involution.

Les six droites menées d'un même point aux sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit à une conique, et les tangentes par ce point à la conique, sont en involution.

Transformons la figure relative au premier théorème, de manière que la conique devienne un cercle, et reproduisons ensuite le cercle, de manière que la nouvelle transversale soit parallèle à un des côtés du nouveau quadrilatère inscrit. Il suffira de démontrer le théorème pour ce cas particulier.

Soit le quadrilatère ABCD inscrit à un cercle (*fig.* 50) et L une transversale parallèle au côté CD, par exemple. Le côté AB coupe L en O, et a, a' étant les intersections du cercle avec L, on a $Oa \times Oa' = OA \times OB$. Les deux autres côtés opposés coupent L en b, b', et les triangles semblables OAb, OBb' donnent $Ob \times Ob' = OA \times OB$. Donc $Oa \times Oa' = Ob \times Ob'$, ce qui prouve l'involution des trois couples de points a, a' ; b, b' ; $0, \infty$; par suite, celle des trois couples de points où le cercle et les côtés opposés d'un quadrilatère inscrit sont coupés par une transversale quelconque, et par suite l'involution pour le cas où le cercle est remplacé par une conique quelconque.

N. B. Au quadrilatère ABCD, on peut substituer tout autre quadrilatère ACBD, par exemple, car $Oa \times Oa' = OA \times OB$, et les triangles semblables OAc', OBc donnent $Oc \times Oc' = OA \times OB$: donc

$$Oa \times Oa' = Oc \times Oc' = Ob \times Ob'.$$

Ainsi : Dans le théorème de Desargues, on peut remplacer deux côtés opposés du quadrilatère par deux diagonales, et par conséquent, dans le corrélatif, on peut remplacer les droites menées à deux sommets par celles qui seraient menées aux points de concours de deux côtés opposés.

De ces deux propositions résultent ces conséquences :

Théorème de Sturm. *Les intersections d'une transversale avec des coniques circonscrites à un même quadrilatère sont des couples de points en involution.*

Les tangentes par un même point à des coniques inscrites à un même quadrilatère sont des couples de rayons en involution.

Si on déforme un quadrilatère inscrit à une conique en faisant tourner trois de ses côtés autour de trois points situés sur la même droite, le quatrième côté tournera autour d'un point de la même droite.

Si on déforme un quadrilatère circonscrit à une conique en faisant glisser trois des sommets sur trois droites se coupant au même point, le quatrième sommet glissera sur une droite passant par le même point.

En supposant nul un des côtés du quadrilatère inscrit :

Une transversale coupe une conique, deux côtés d'un triangle inscrit, le troisième côté du triangle et la tangente par le sommet opposé, en six points en involution.

Les tangentes par un point à une conique, les droites menées de ce point à deux sommets d'un triangle circonscrit, au troisième sommet et au point de contact du côté opposé, sont en involution.

Inscrire à une conique un triangle dont les trois côtés passent par trois points donnés sur une droite.

Circonscrire à une conique un triangle dont les trois sommets soient situés sur trois droites qui se coupent au même point.

On inscrira un quadrilatère dont trois sommets passent par les points donnés, et si du point où le quatrième côté coupe la droite on mène des tangentes à la conique, les points de contact de ces tangentes seront les

On circonscrira un quadrilatère dont trois sommets soient sur les droites données, et si l'on joint le quatrième sommet au point où se coupent les droites, on aura une droite qui donnera sur la conique les sommets de deux triangles inscrits qui satisferont à la question.

points de contact des côtés de deux triangles circonscrits qui satisferont à la question.

Construire une conique :

1° Passant par cinq points.

Quatre de ces points sont les sommets d'un quadrilatère inscrit *abcd*. Menons une transversale par le cinquième point *e*. Elle coupera les côtés opposés du quadrilatère en deux couples de points qui déterminent une involution. Le conjugué du point *e* sera un nouveau point de la conique.

Construire la tangente en chacun de ces points.

Soit à construire la tangente au point *a*, par exemple. Le triangle inscrit *abc* peut être considéré comme un quadrilatère dont la tangente en *a* représenterait le côté devenu nul. La transversale *de* passant par les deux autres points coupe les côtés opposés *ab*, *ac* en deux points qui déterminent une involution avec *d* et *e*. Le conjugué du point où la transversale coupe le côté *bc*, sera un second point de la tangente en *a*.

3° Passant par quatre points et touchant une droite.

Les quatre points sont les sommets d'un quadrilatère inscrit. La droite

2° Tangente à cinq droites.

Quatre des tangentes sont les côtés d'un quadrilatère circonscrit ABCD. Prenons un point *m* sur la cinquième tangente. Les deux couples de droites *m*A, *m*C; *m*A, *m*B, menées aux sommets opposés du quadrilatère, déterminent une involution. Le rayon conjugué de la cinquième tangente sera une nouvelle tangente de la conique.

Trouver le point de contact de chacune des tangentes.

Soit à trouver le point de contact de la tangente AB. Le triangle circonscrit ABC peut être considéré comme un quadrilatère dont le côté AB représenterait deux tangentes qui coïncident. *m* étant le point où se coupent les deux autres tangentes, les rayons *m*A, *m*B menés à deux sommets opposés déterminent une involution avec ces tangentes. Le rayon conjugué de *m*C coupe la tangente AB au point de contact.

4° Touchant quatre droites et passant par un point.

Les quatre tangentes sont les côtés d'un quadrilatère circonscrit. Le point coupe les côtés opposés en deux couples de points qui déterminent une involution dont le point de contact de la droite avec la conique serait un point double. Comme il existe deux points doubles, le problème a deux solutions, et se ramène au premier cas.

joint aux sommets opposés donne deux couples de droites qui déterminent une involution dont la tangente par le point à la conique serait un rayon double. Comme il existe deux rayons doubles, le problème a deux solutions, et se ramène au second cas.

5° *Passant par trois points* a, b, c, *et touchant deux droites* T, T′.

Le problème consiste à trouver les points de contact *d*, *e* des deux droites, ce qui ramènera ce cas au premier.

Les deux tangentes T, T′ peuvent être considérées comme les côtés devenus nuls d'un quadrilatère inscrit dont les autres côtés coïncideraient avec la corde de contact inconnue *de*.

La transversale *ab* passant par deux des trois points, coupe T, T′ en deux points qui déterminent avec *a* et *b* une involution dont l'intersection de la transversale avec la corde de contact serait un point double. De même on aura une involution sur la transversale *bc*, et chaque involution ayant deux points doubles, il en résulte quatre droites dont chacune donnera une solution, car elle détermine les points de contact *d* et *e* de T, T′.

N. B. La troisième transversale

6° *Touchant trois droites* T, T′, T″, *et passant par deux points* a, b.

Le problème consiste à trouver les tangentes par les deux points *a*, *b*, ou leur intersection *m*, ce qui ramènera ce cas au second.

Les deux points *a*, *b* peuvent être considérés comme les sommets d'un quadrilatère circonscrit dont les tangentes en *a* et *b* représenteraient chacune deux côtés qui coïncident.

Soit ABC le triangle formé par les trois droites T, T′, T″. Les tangentes AB, AC déterminent avec A*a* et B*b* une involution dont A*m* est un rayon double. De même les tangentes BA, BC déterminent avec B*a* et B*b* une involution dont B*m* est un rayon double, et le point *m* résulte de l'intersection de deux rayons doubles.

Chaque involution ayant deux rayons doubles, il en résulte quatre points dont chacun donnera une solution.

N. B. L'involution que détermi-

ac donnerait deux autres points doubles, d'où semblent résulter quatre solutions nouvelles : mais les points doubles, étant conjugués harmoniques sur chacun des côtés du triangle *abc*, sont situés trois à trois sur les mêmes quatre droites.

nent les tangentes CA, CB avec C*a* et C*b* donnerait deux autres rayons doubles, d'où semblent résulter quatre solutions nouvelles : mais les rayons doubles, étant conjugués harmoniques par rapport aux côtés de chaque angle du triangle ABC, se coupent trois à trois aux quatre mêmes points.

Enfin, voici comment M. Chasles a déduit du théorème de Desargues et du corrélatif ceux de Pascal et de Brianchon.

Soit l'hexagone ABCDEF inscrit à une conique (*fig.* 22).

La diagonale AD est un côté commun aux deux quadrilatères inscrits ABCD, ADEF. Les deux côtés AB, BC du premier rencontrent les côtés DE, EF du second en deux points I, K, et la ligne IK rencontre au même point les côtés qui coïncident suivant AD. Donc les quadrilatères ayant trois côtés qui se coupent en trois points situés sur la droite IK, les deux autres côtés CD, AF se couperont aussi sur cette droite. Ainsi, les côtés opposés AB, DE ; BC, EF ; CD, AF de l'hexagone inscrit se coupent en trois points situés sur la même droite IK, ce qui est le théorème de Pascal.

Soit l'hexagone ABCDEF circonscrit à une conique (*fig.* 51).

Le point de concours O de deux côtés opposés AB, DE est un sommet commun aux deux quadrilatères circonscrits OAFE, OBCD. Les diagonales AD, BE se coupent en I, et, en joignant ce point au point O, les deux quadrilatères ont trois sommets situés sur trois droites qui se coupent au même point I. Donc les deux autres sommets C et F sont sur une droite qui passe par le point I. Ainsi les diagonales AD, BE, CF, qui joignent les sommets opposés de l'hexagone circonscrit, se coupent toutes les trois en un même point, ce qui est le théorème de Brianchon.

On trouvera un nouvel exemple du principe de la dualité dans les deux paragraphes qui suivent, et qui pourraient se réduire à un seul, en plaçant en regard les propositions corrélatives dont on verra que les démonstrations sont aussi corrélatives.

§ XVII. Propriété fondamentale relative aux points d'une conique.

166. Lemme. — *Le rapport anharmonique du faisceau que l'on obtient en joignant quatre points fixes d'une conique à tout autre point de la courbe, reste constant.*

Évident pour le cercle ; car lorsque le cinquième point se déplace sur la circonférence, les angles du faisceau sont mesurés par les moitiés des mêmes arcs, ou par les moitiés des arcs qui complètent la circonférence. Donc le lemme est vrai pour une conique quelconque.

M. Chasles appelle ce rapport constant, *rapport anharmonique des quatre points de la conique.*

167. *Deux droites qui tournent autour de deux points d'une conique, et qui se coupent sur la courbe, sont des rayons correspondants de deux faisceaux homographiques.*

En effet, quatre couples de rayons correspondants auront, d'après le lemme, même rapport anharmonique.

168. Réciproquement : *Le lieu des points d'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques est une conique qui passe par les centres des deux faisceaux.*

Car si la conique déterminée par les deux centres et les points d'intersection de trois couples de rayons correspondants ne passait pas par les intersections des autres couples, en joignant le centre de l'un des faisceaux aux intersections des rayons de l'autre avec la conique, on aurait deux faisceaux homographiques de même centre. Trois rayons de l'un coïncideraient avec trois rayons correspondants de l'autre, et tous les autres rayons ne coïncideraient pas, ce qui est impossible.

D'ailleurs, les deux faisceaux donneraient sur une transversale quelconque deux divisions homographiques dont les points doubles seraient les intersections de la transversale avec le lieu; et comme il n'existe que deux points doubles, le lieu est une courbe du second *degré* ou une conique.

On bien : Soient P,P′ (*fig.* 52) les centres de deux faisceaux homographiques, et PQ le rayon du premier qui correspond à la ligne des centres considérée comme rayon P'P du second. Décrivons un cercle tangent en P à PQ, et soit π le point où ce cercle coupe la ligne des centres. a étant l'intersection de deux rayons homologues, et α le point où le rayon Pa coupe le cercle, joignons $\pi\alpha$. P et π seront les centres des deux faisceaux homographiques dont les rayons se coupent sur le cercle, la tangente PQ étant le rayon du premier qui correspond à la ligne des centres πP considérée comme rayon du second. Donc π et P' sont les centres de deux faisceaux homographiques ayant pour rayon commun la ligne des centres ; par conséquent. tous les autres rayons correspondants, tels que $\pi\alpha$, P'a, se coupent sur une même droite MN.

Du point a abaissons une perpendiculaire ab sur cette droite, et joignons $b\alpha$. Le triangle variable $ab\alpha$, ayant les sommets sur trois droites qui concourent au même point M, aura les côtés qui tourneront autour de trois points situés en ligne droite ; et comme ab est perpendiculaire à MN, les deux points P et O, autour desquels tourneront les côtés $b\alpha$ et $a\alpha$, seront sur une droite perpendiculaire à MN.

Prenons le point P pour un point de concours, le point O pour origine et la droite MN pour parallèle. Le point α du cercle se transformera en a, et le lieu du point a sera une conique transformée du cercle que décrit le point α. Elle passera par les centres P, P' des deux faisceaux, car P reste invariable, et π se transforme en P'.

La conique aura la tangente en P commune avec le cercle, et la tangente en P' sera la transformée de la tangente en π au cercle ; par conséquent elle correspondra à la ligne des centres considérée comme rayon PP' de l'autre faisceau.

N. B. On aura une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que l'axe des y ou la parallèle par le point O à la droite MN sera extérieure au cercle, sécante ou tangente.

169. *Construire une conique passant par cinq points.*— Les droites qui joignent deux de ces points à chacun des trois autres sont trois couples de rayons correspondants de deux faisceaux homographiques. On se donnera un nouveau rayon de l'un des faisceaux, et son intersection avec le rayon correspondant de l'autre fera connaître un nouveau point de la courbe.

Trouver la tangente en chacun des cinq points. — Soient P, P′ deux des cinq points que l'on peut prendre pour centres des deux faisceaux. Les tangentes en P et P′ seront les rayons homologues à P′P et à PP′ considérés comme rayons de l'autre faisceau.

Trouver les intersections de la conique avec une droite. — Les faisceaux homographiques ayant pour centres deux des cinq points P, P′ donneront sur la droite trois couples de points correspondants de deux divisions homographiques, au moyen desquels on construira les deux points doubles qui seront les intersections de la courbe non tracée avec la droite.

Si les points doubles coïncident, la droite est tangente à la conique, et on a son point de contact.

Si les points doubles n'existent pas, la droite est extérieure à la courbe. On dit alors que les intersections avec la conique sont *imaginaires*.

Construction des asymptotes. — Pour que la courbe ait des points à l'infini, il faut que les faisceaux homographiques aient des rayons correspondants parallèles. On trouvera les directions de ces rayons en menant par le point P des parallèles à P′a, P′b, P′c. Elles détermineront, avec Pa, Pb, Pc, deux faisceaux homographiques de même centre, et les rayons doubles passeront par les points de la courbe situés à l'infini. Si ces rayons existent, la courbe est une *hyperbole*; s'ils coïncident, la courbe est une *parabole*; s'ils n'existent pas, la courbe est une *ellipse*.

Si les rayons existent, menons par les trois points a, b, c des parallèles à ces rayons. Elles détermineront deux faisceaux homographiques ayant leurs centres à l'infini. Ces parallèles donneront sur une transversale L trois couples de points α, α' ; β, β' ; γ, γ' de deux divisions homographiques, au moyen desquels on trouvera les points I et J′ qui correspondent à l'infini. Les parallèles par ces points aux rayons doubles seront les asymptotes de la courbe.

170. Théorème de Papus. — *Quand un quadrilatère* ABCD (*fig.* 53) *est* *inscrit à une conique, le produit des distances de chaque point de la courbe à deux côtés opposés est au produit des distances du même point aux deux autres côtés opposés dans une raison constante.*

Soit m un point quelconque de la conique. En joignant deux sommets opposés A et C aux trois autres points m, B, D, on a trois couples de rayons homologues de deux faisceaux homographiques. Donc

$$\frac{\sin m\mathrm{AB}}{\sin m\mathrm{AD}} = \lambda \frac{\sin m\mathrm{CB}}{\sin m\mathrm{CD}}.$$

Le premier membre est égal au rapport des perpendiculaires p, q abaissées de m sur les côtés AB, AD ; et le second, au rapport des perpendiculaires $p'.q'$ sur les autres côtés BC, CD ; par conséquent

$$\frac{p}{q} = \lambda \frac{q'}{p'}, \text{ d'où } pp' = \lambda qq', \; c.q.f.d.$$

En décomposant un hexagone inscrit en deux quadrilatères ayant pour côté commun la diagonale joignant deux sommets opposés, on verra que *le produit des distances d'un point de la conique aux côtés de rang pair d'un hexagone inscrit est au produit des distances aux côtés de rang impair dans une raison constante.*

On étendra le théorème à un polygone d'un nombre pair de côtés en démontrant de même que s'il a lieu pour un polygone de $2m$ côtés, il aura lieu pour un polygone de deux côtés de plus.

Si l'on suppose tous les côtés de rang impair tangents à la conique :

Un polygone d'un nombre quelconque de côtés étant inscrit à une conique, le produit des distances d'un point de la courbe aux côtés est au produit des distances du même point aux tangentes à la conique, par les sommets, dans une raison constante.

171. Théorème de Desargues.— *Une transversale coupe une conique et les côtés opposés d'un quadrilatère inscrit en six points en involution.*

Soit le quadrilatère inscrit ABCD. Deux sommets opposés A,C sont les centres de deux faisceaux homographiques qui donnent sur une transversale quelconque L deux faisceaux homographiques dont les points doubles e et f sont les intersections de la transversale avec la conique. a, b et b', a' sont deux couples de points homologues ; donc les points doubles e et f sont en involution avec les intersections a, a' et b, b' de la transversale et des côtés opposés.

Le théorème s'applique évidemment aux deux diagonales et à un couple de côtés opposés qui forment un quadrilatère inscrit.

172. *Si les trois côtés d'un triangle* aa'm (*fig.* 54) *pivotent sur trois points fixes* r, p, p', *et que deux des sommets* a, a' *glissent sur deux droites fixes* L, L', *le troisième sommet* m *décrit une conique.*

Car le côté aa', en tournant autour du point r, donne deux divisions homographiques sur les deux droites L, L'. Donc pa et $p'a'$ sont des rayons homologues de deux faisceaux homographiques, et leur intersection m décrit une conique.

N. B. La conique passe par les centres p, p' des deux faisceaux ; par l'intersection S des deux droites ; par les points b et c où pr et $p'r$ coupent L et L'. Par conséquent, elle passe par les cinq points p, p', S, b, c, au moyen desquels on peut la construire, car Sc, Sb déterminent les droites L, L', et pb, $p'c$ déterminent le point r.

On a donc un hexagone $pmp'cSbp$ inscrit à la conique, et les points de concours a, r, a' des côtés opposés sont en ligne droite ; d'où résulte le théorème de Pascal.

En général : *Si tous les côtés d'un polygone tournent autour de tout autant de points fixes, et si tous les sommets, moins un, glissent sur tout autant de droites fixes, le dernier sommet décrira une conique qui passera par les deux points fixes autour desquels tournent les côtés adjacents.*

Car deux côtés consécutifs tournant autour de deux points, et leur intersection glissant sur une droite, décrivent deux faisceaux homographiques. Le côté suivant décrit un faisceau homographique à celui que décrit le second, et par suite à celui que décrit le premier, et ainsi de suite. Donc le dernier sommet est l'intersection de deux rayons correspondants de deux faisceaux homographiques, et le lieu de ce sommet est une conique passant par les centres de ces faisceaux, ou par les points autour desquels tournent les côtés adjacents.

N. B. Le point d'intersection de deux côtés quelconques décrit une conique passant par les points autour desquels tournent ces côtés : car ces côtés décrivent aussi des faisceaux homographiques.

Les points fixes sont les sommets d'un polygone d'un même nombre de côtés auquel le polygone donné est circonscrit. Donc :

Si l'on circonscrit à un polygone un polygone d'un même nombre de côtés dont tous les sommets, moins un, glissent sur autant de droites fixes, le dernier sommet décrira une conique.

On verra facilement comment le théorème se modifie lorsque tous les points autour desquels tournent les côtés sont situés sur une même droite.

§ XVIII. Propriété fondamentale relative aux tangentes d'une conique.

173. *Le rapport anharmonique des intersections de quatre tangentes à une conique avec toute autre tangente de la courbe reste constant.*

Évident pour le cercle, car le faisceau que l'on obtient en joignant le centre aux points où les quatre tangentes sont coupées par une cinquième a ses rayons respectivement perpendiculaires à ceux du faisceau que l'on obtiendrait en joignant le point de contact de la cinquième tangente aux points de contact des quatre tangentes fixes. Donc le rapport anharmonique du premier faisceau est égal au rapport anharmonique des quatre points de contact des tangentes fixes, et nous avons vu que ce rapport est constant.

M. Chasles appelle ce rapport : *Rapport anharmonique des quatre tangentes de la conique.*

174. *Une tangente mobile d'une conique coupe deux tangentes fixes en deux points correspondants de deux divisions homographiques.*

Car la tangente mobile, dans quatre de ces positions donne sur chacune des tangentes fixes quatre points dont le rapport anharmonique est égal, d'après le lemme.

175. Réciproquement : *La courbe enveloppe des droites qui joignent les points correspondants de deux divisions homographiques est une conique tangente aux deux droites sur lesquelles sont ces divisions.*

Car si la conique tangente aux deux droites et à trois des droites qui joignent des points homologues n'était pas tangente aux droites qui joignent les autres points homologues, en menant des tangentes par les points de division de l'une des droites données on aurait sur l'autre droite deux séries homographiques ; trois points de l'une coïncideraient avec les trois points correspondants de l'autre, et tous les autres points correspondants ne coïncideraient pas, ce qui est impossible.

D'ailleurs, les rayons menés d'un point p à des points homologues des deux divisions donneront deux faisceaux homographiques de même centre, dont les rayons doubles seront les tangentes, au lieu, par le centre p ; et comme il n'existe que deux rayons doubles, le lieu est une courbe de la seconde *classe*, ou une conique.

Ou bien : Soient L, L' deux droites divisées homographiquement, et a, a' deux points correspondants des deux divisions. Le point S' d'intersection des deux droites (*fig.* 55) considéré comme point de L' correspond à un point S de L. Décrivons un cercle tangent en S à L, et menons à ce cercle une seconde tangente S'L''. La tangente au cercle par le point a coupera S'L'' en α. Abaissons la perpendiculaire $a'b$ sur S'L, et joignons $b\alpha$. Le triangle variable $a'b\alpha$ ayant les sommets sur trois droites qui concourent en S', les côtés tourneront autour de trois points situés en ligne droite ; et comme $a'b$ est perpendiculaire à S'L, les points E et O autour desquels tourneront les côtés $a'\alpha$ et $b\alpha$ seront sur une droite perpendiculaire à S'L.

Prenons le point E pour point de concours, le point O pour origine, et S'L pour parallèle. Le point α se transformera en a', et la tangente $a\alpha$ du cercle deviendra une tangente aa' à la transformée du cercle, qui est une conique.

La conique sera tangente à S'L comme le cercle, et à S'L', transformée de la tangente S'L'' du cercle.

N. B. On aura une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que l'axe des y ou la parallèle par le point O à la droite S'L sera extérieure au cercle, sécante ou tangente.

176. *Construire une conique tangente à cinq droites.* — Deux des cinq droites sont coupées par les trois autres en trois couples de points qui déterminent deux divisions homographiques. On se donnera un nouveau point de l'une des divisions, et, en le joignant au point correspondant de l'autre, on obtiendra une nouvelle tangente à la conique.

Trouver les points de contact sur ces droites. — Soient A et B deux des cinq droites sur lesquelles on a formé les divisions homographiques, et M le point où elles se coupent. Le point correspondant à M, considéré successivement comme appartenant à chacune des deux divisions, fera connaître les deux points de contact sur A et sur B.

N. B. On pourra chercher les cinq points de contact et construire la conique au moyen de ces points.

Tangentes à la conique par un point p. — a, a'; b, b'; c, c' étant les trois couples de points où deux des tangentes sont coupées par les trois autres, pa, pa'; pb, pb'; pc, pc' seront trois couples de rayons correspondants de deux faisceaux homographiques, et les rayons doubles seront les tangentes à la conique par le point p.

S'il existe deux rayons doubles, on aura deux tangentes, et le point p sera extérieur à la conique.

Si les rayons doubles coïncident, on n'aura qu'une tangente, et le point p sera sur la courbe.

S'il n'existe pas de rayons doubles, le point p sera intérieur à la courbe, et on dit alors que les tangentes sont *imaginaires*.

177. *Quand un quadrilatère* ABCD (*fig.* 56) *est circonscrit à une conique, le produit des distances d'une tangente quelconque* mm' *à deux sommets opposés est au produit des distances de la même tangente aux autres sommets opposés dans une raison constante.*

Car les tangentes AB, CD sont coupées par les trois autres en trois couples de points homologues m, m'; A, D; B, C de deux divisions homographiques. Donc

$$\frac{Am}{Bm} = \lambda \frac{Dm'}{Cm'};$$

mais $\frac{Am}{Bm} = \frac{p}{q}$, et $\frac{Dm'}{Cm'} = \frac{q'}{p'}$; par conséquent

$$\frac{p}{q} = \lambda \frac{q'}{p'}, \text{ ou } pp' = \lambda qq', \ c. q. f. d.$$

Ce théorème, corrélatif de celui de Papus, se généralise et donne les suivants :

Quand un polygone d'un nombre pair de côtés est inscrit à une conique, le produit des distances d'une tangente quelconque aux sommets de rang pair est au produit des distances aux sommets de rang impair dans une raison constante.

Pour un polygone d'un nombre quelconque de côtés, le produit des distances de chaque tangente aux sommets et le produit des distances de la même tangente aux points de contact des côtés sont dans une raison constante.

178. Théorème corrélatif de celui de Desargues. — *Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, les droites menées d'un point quelconque à ses sommets opposés et les tangentes par ce point à la courbe sont en involution.*

Soit ABCD le quadrilatère circonscrit. Les tangentes à la conique donnent des divisions homographiques sur deux côtés opposés AB, CD. Les droites qui joignent un point quelconque P aux points correspondants des deux divisions, comme PA, PD ; PB, PC, sont des rayons correspondants de deux faisceaux homographiques, et les tangentes PE, PF à la conique sont évidemment des rayons doubles. Donc les rayons doubles PE, PF sont en involution avec PA, PC et PB, PD.

179. *Si les trois sommets d'un triangle* aa'm *glissent sur trois droites* L, L', L'', *et que deux côtés pivotent autour de deux points fixes* p, p', *le troisième côté* aa' *enveloppera une conique* (*fig*. 57).

Soit m un sommet du triangle dans une de ses positions ; mp et mp' donneront, sur L et L', les deux autres sommets a, a' ; et ces points étant des points correspondants de deux divisions homographiques, il en résulte la proposition énoncée.

N. B. La conique est aussi tangente à pp', car cette droite passe par des points correspondants des deux divisions homographiques, lorsque le sommet m, en glissant, vient sur cette droite. b et c étant les intersections de L'' avec L et L', lorsque le point m glissera en b ou en c, $p'b$ et pc seront aussi des tangentes à la conique.

Les six tangentes L, L′, pp', $p'b$, pc, aa' sont les côtés d'un hexagone $aa'cpp'ba$ circonscrit à la conique dont les diagonales ap, $a'p'$, bc qui joignent les sommets opposés se coupent au même point m, d'où résulte le théorème de Brianchon.

Généralement : *Si tous les sommets d'un polygone glissent sur tout autant de droites fixes et que tous les côtés, moins un, pivotent sur tout autant de points fixes, le côté libre enveloppera une conique tangente aux deux droites sur lesquelles glissent les extrémités de ce côté.*

Car tous les sommets du polygone divisent homographiquement les côtés sur lesquels ils glissent, d'où résulte le théorème, et on voit de plus que *la diagonale qui joint deux sommets quelconques enveloppe une conique tangente aux deux droites sur lesquelles glissent les extrémités de cette diagonale.*

NOTE SUR L'HOMOGRAPHIE.

M. Chasles a résumé l'homographie dans ce principe :

Lorsqu'en traitant une question de Géométrie où n'entrent pas de transcendantes (fonctions de courbes), on est conduit à considérer deux séries de points sur deux droites distinctes, ou sur la même droite, s'il arrive qu'à un point de la première série ne corresponde qu'un seul point de la seconde et réciproquement, on peut en conclure, sans plus de recherches, que les deux séries sont homographiques.

Prenons les deux droites pour axes, et soient h, h' les distances de deux points correspondants quelconques, m, m' à l'origine. Puisqu'on exclut les transcendantes, et qu'à une valeur de h ne doit correspondre qu'une seule valeur de h' et réciproquement, il devra exister entre h et h' une relation qui sera algébrique et nécessairement de la forme

$$hh' + Ah + Bh' + C = 0 \qquad (1).$$

Il faudra se donner trois couples de valeurs de h, h' pour déterminer les constantes A, B, C; et, la relation (1) n'ayant alors rien d'arbitraire, on va voir qu'il en résulte deux divisions telles que le rapport anharmonique de quatre points de l'une soit égal à celui des quatre points correspondants de l'autre.

En effet, r, r', r'' étant les valeurs de h qui donnent les points a, b, c, et ρ, ρ', ρ'' celles de h' qui donnent les points correspondants a', b', c',

$$h = -\frac{Bh' + C}{h' + A}, \qquad r = -\frac{B\rho + C}{\rho + A}$$

$$h - r = \frac{(AB - AC)(\rho - h')}{(h' + A)(\rho + A)} \quad \text{et} \quad h - r' = \frac{(AB - AC)(\rho' - h')}{(h' + A)(\rho' + A)}$$

$$\frac{h - r}{h - r'} = \frac{h' - \rho}{h' - \rho'} \times \frac{\rho' + A}{\rho + A} \quad \text{ou} \quad \frac{am}{bm} = \frac{a'm'}{b'm'} \times \frac{\rho' + A}{\rho + A}$$

de même $\frac{ac}{bc} = \frac{a'c'}{b'c'} \times \frac{\rho' + A}{\rho + A}$: donc $\frac{am}{bm} : \frac{ac}{bc} = \frac{a'm'}{b'm'} : \frac{a'c'}{b'c'}$.

La démonstration s'applique évidemment au cas où les divisions sont formées sur la même droite, h, h' étant les distances de deux points correspondants m, m' à un même point de la droite pris pour origine.

N. B. La relation plus simple $h + Ah' + B = 0$ donnerait des divisions proportionnelles. On aurait $r + A\rho + B = 0$, $r' + A\rho' + B = 0$, d'où $\frac{h - r}{h - r'} = \frac{h' - \rho}{h' - \rho'}$ ou $\frac{am}{bm} = \frac{a'm'}{b'm'}$.

Lorsque les divisions homographiques sont formées sur une même droite, il existe deux points doubles réels ou imaginaires, dont les distances à l'origine sont les racines de l'équation du second degré

$$x^2 + (A + B)x + C = 0$$

que l'on obtient en faisant $h = h' = x$ dans (1).

Le milieu des deux points doubles est un point toujours réel, pour lequel $x = -\frac{1}{2}(A + B)$.

$h = \infty$ donne $h' = -A$, qui détermine le point J'.

$h' = \infty$ donne $h = -B$, qui détermine le point I.

Donc : *Le milieu des deux points doubles est aussi le milieu* O *des deux points* I *et* J'.

O' étant le point correspondant à O et e désignant un des points doubles, on rouvera facilement

$$Oe^2 = OO' \times OJ'.$$

Ainsi : Les points doubles n'existent que si les points O' et J' sont situés d'un même côté du point O, et leur distance à ce point est la longueur de la tangente au cercle décrit sur O'J' comme diamètre.

Le principe de M. Chasles s'étend à deux faisceaux de droites issues de deux points différents ou d'un même point, et tels qu'à une droite de l'un ne correspond qu'une seule droite de l'autre, et réciproquement.

Car en prenant deux axes tels que chacun coupe les rayons de l'un des faisceaux et passe par le centre de l'autre, on aurait sur ces deux droites des divisions homographiques, puisque à un point de l'une des divisions ne correspondrait qu'un seul point de l'autre, et réciproquement. Si les faisceaux avaient même centre, ils détermineraient deux divisions homographiques sur une transversale quelconque.

Applications. — *Les tangentes d'une conique donnent des divisions homographiques sur deux tangentes fixes.* Car à un point de l'une des divisions ne correspond qu'un seul point de l'autre, et réciproquement.

Il en résulte le lemme du § XVIII.

Réciproquement : *La ligne qui joint deux points correspondants de deux divisions homographiques sur deux droites enveloppe une conique tangente à ces droites.*

L'équation de la ligne mm' est

$$\frac{h}{x} + \frac{y}{h'} = 1 ;$$

ou, à cause de la relation (1)

$$(y + A)h^2 + (B - Ax + C)h + C = 0 ,$$

l'enveloppe s'obtient, comme l'on sait, en éliminant h entre cette équation et la dérivée par rapport à h, d'où résulte la conique

$$B^2y^2 + 2(C - AB)xy + A^2x^2 - 2BCy + 2ACx + C^2 = 0$$

dont la discussion est facile.

Les droites qui joignent deux points fixes d'une conique à tout autre point de la courbe sont des couples de rayons correspondants de deux faisceaux homographiques.

Car à un rayon de l'un des faisceaux ne correspond qu'un seul rayon de l'autre, et réciproquement.

Il en résulte le lemme du § XVII.

Réciproquement : *Le lieu des points d'intersection des rayons correspondants de deux faisceaux homographiques est une conique qui passe par les centres de ces faisceaux.*

k, k' étant les distances des centres à l'origine, les équations de deux rayons homologues sont

$$\frac{y}{h'} + \frac{x}{k} = 1, \qquad \frac{y}{k'} + \frac{x}{h} = 1.$$

L'élimination de h, h' au moyen de la relation (1) donne la conique

$$Bky^2 - (kk' + C)xy + Ak'x^2 + k(C - Bk')y + k'(C - Ak)x - Ckk' = 0,$$

dont la discussion est facile.

Involution. — Lorsqu'on a deux divisions homographiques sur la même droite, et que $A = B$, les points I et J' coïncident, et la relation (1) devient

$$hh' + A(h + h') + C = 0 \qquad (2)$$

symétrique par rapport à h et à h'. Donc on peut intervertir entre eux les points correspondants, et les divisions sont en involution.

Pour que l'involution ait lieu, il suffit qu'on puisse intervertir deux points correspondants.

Car α, α' étant les valeurs de h, h' qui déterminent les points a, a', si l'on peut intervertir ces points on aura

$$\alpha\alpha' + A\alpha + B\alpha' + C = 0, \quad \text{et} \quad \alpha'\alpha + A\alpha' + B\alpha + C = 0,$$

d'où $(A - B)(\alpha - \alpha') = 0$; et comme α diffère de α', il faudra que $A = B$ ou que (1) prenne la forme (2).

Les points doubles de l'involution sont donnés par

$$x^2 + 2Ax + C = 0.$$

Leur milieu est un point toujours réel $x = -A$, qui coïncide avec I et J'. En le prenant pour origine, (2) devient

$$hh' = \pm k^2$$

facile à discuter.

Deux faisceaux homographiques de même centre sont en involution si l'on peut intervertir deux rayons correspondants.

Car on aurait sur une transversale quelconque deux divisions homographiques dont on pourrait intervertir deux points correspondants.

Applications. — *Des coniques circonscrites à un même quadrilatère donnent des divisions en involution sur une transversale quelconque.*

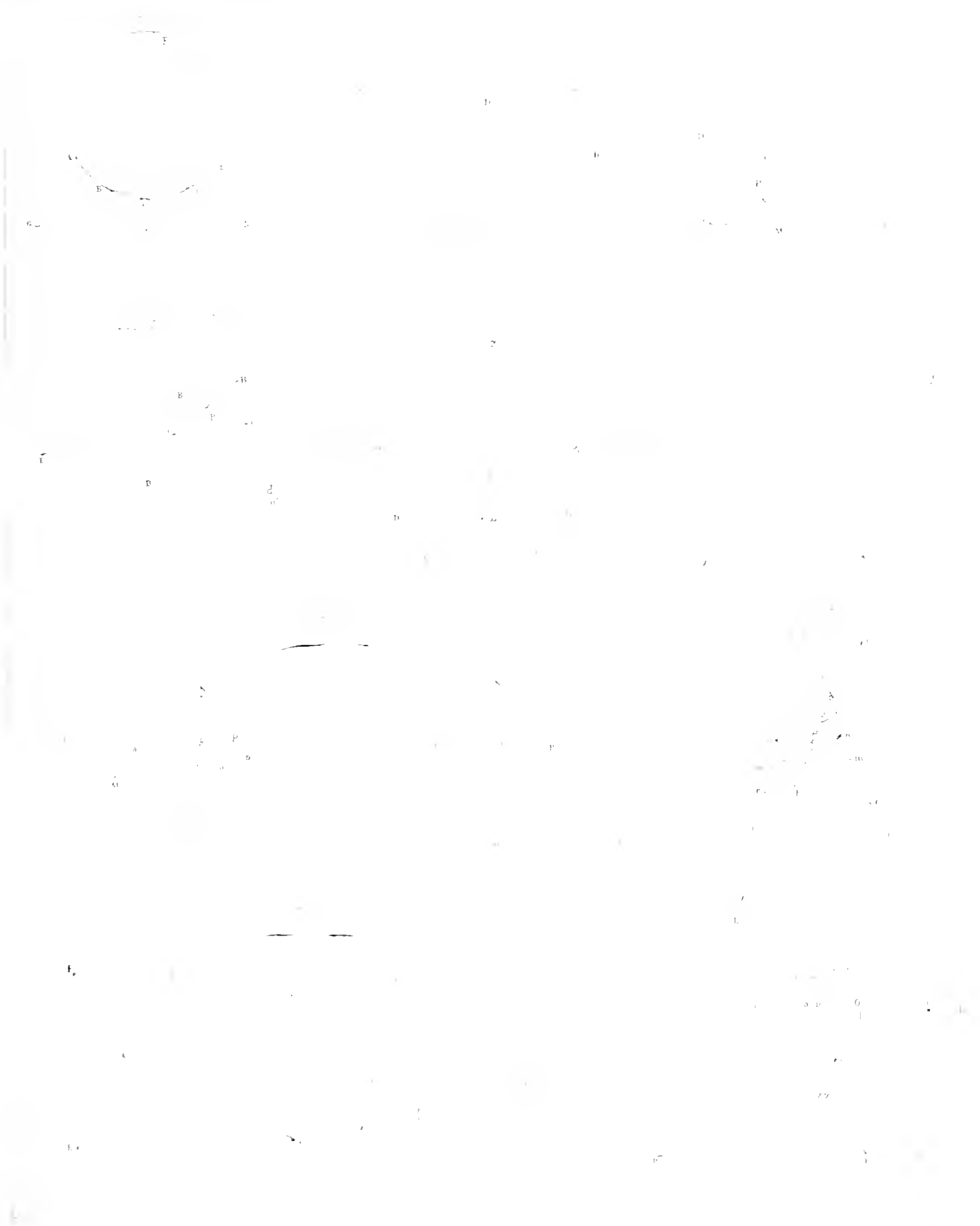
Car chaque point de la transversale détermine avec les quatre sommets du quadrilatère une conique circonscrite, et par suite deux points correspondants m, m' de deux divisions homographiques sur la transversale ; mais, comme la même conique résulte, soit du point m, soit du point m', ces deux points peuvent s'intervertir, et il y a involution.

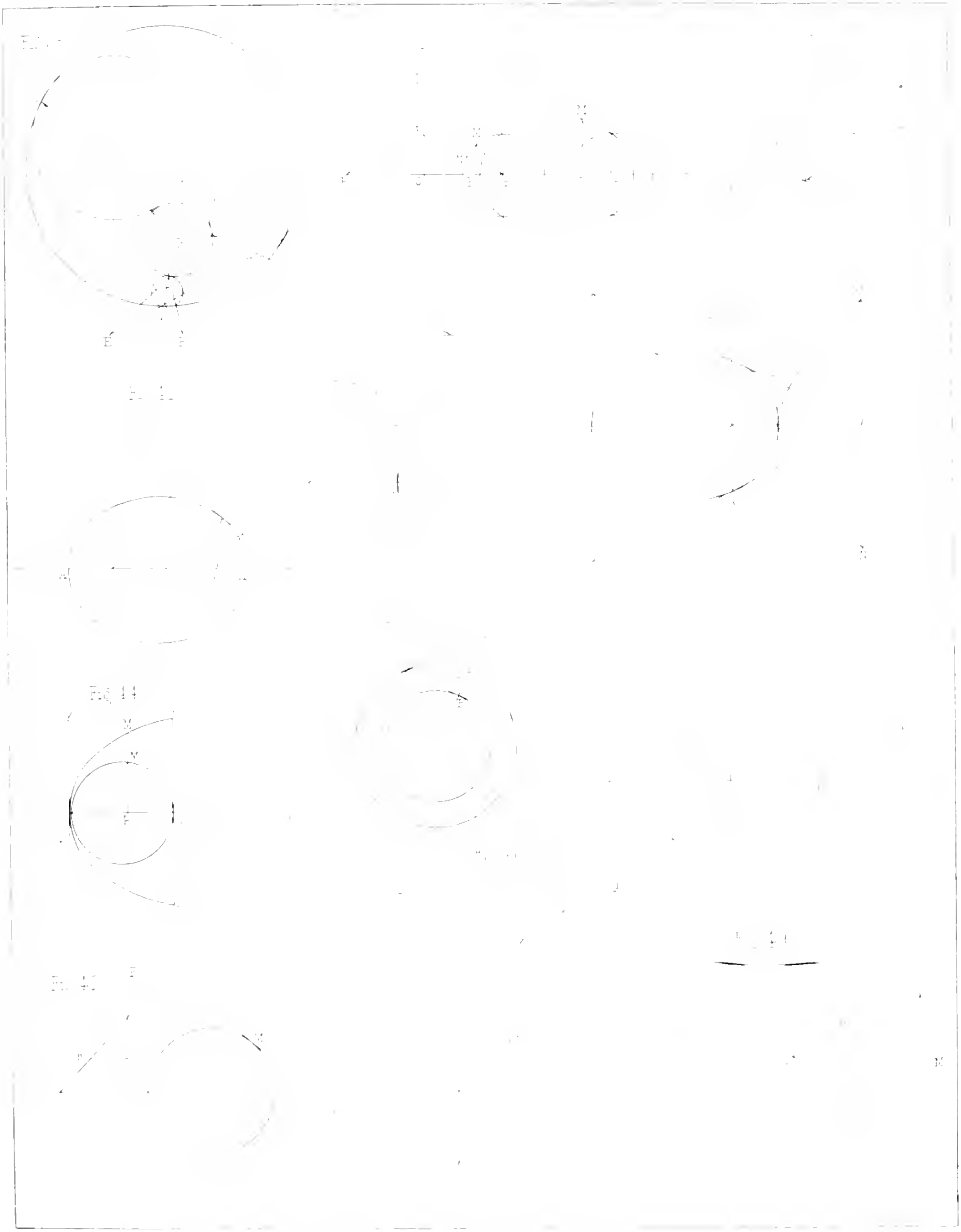
Les tangentes par un même point à des coniques inscrites à un même quadrilatère sont des couples de rayons correspondants de deux faisceaux en involution.

Car chaque droite menée par un point P détermine avec les quatre côtés du quadrilatère une conique inscrite, et par suite deux tangentes Pm, Pm' à cette conique, qui sont des rayons correspondants de deux faisceaux homographiques. Mais, comme la même conique résulte, soit de la droite Pm, soit de la droite Pm', ces deux droites peuvent s'intervertir, et il y a involution.

Pag.	19. ligne	9,	au lieu de	fig. 1,	lisez	fig. 7.
—	73 —	9	—	fig. 32	—	fig. 33.
—	89 —	6	—	fixe	—	prise.
—	95 —	9	—	fig. 42	—	fig. 41.

TABLE DES MATIÈRES.





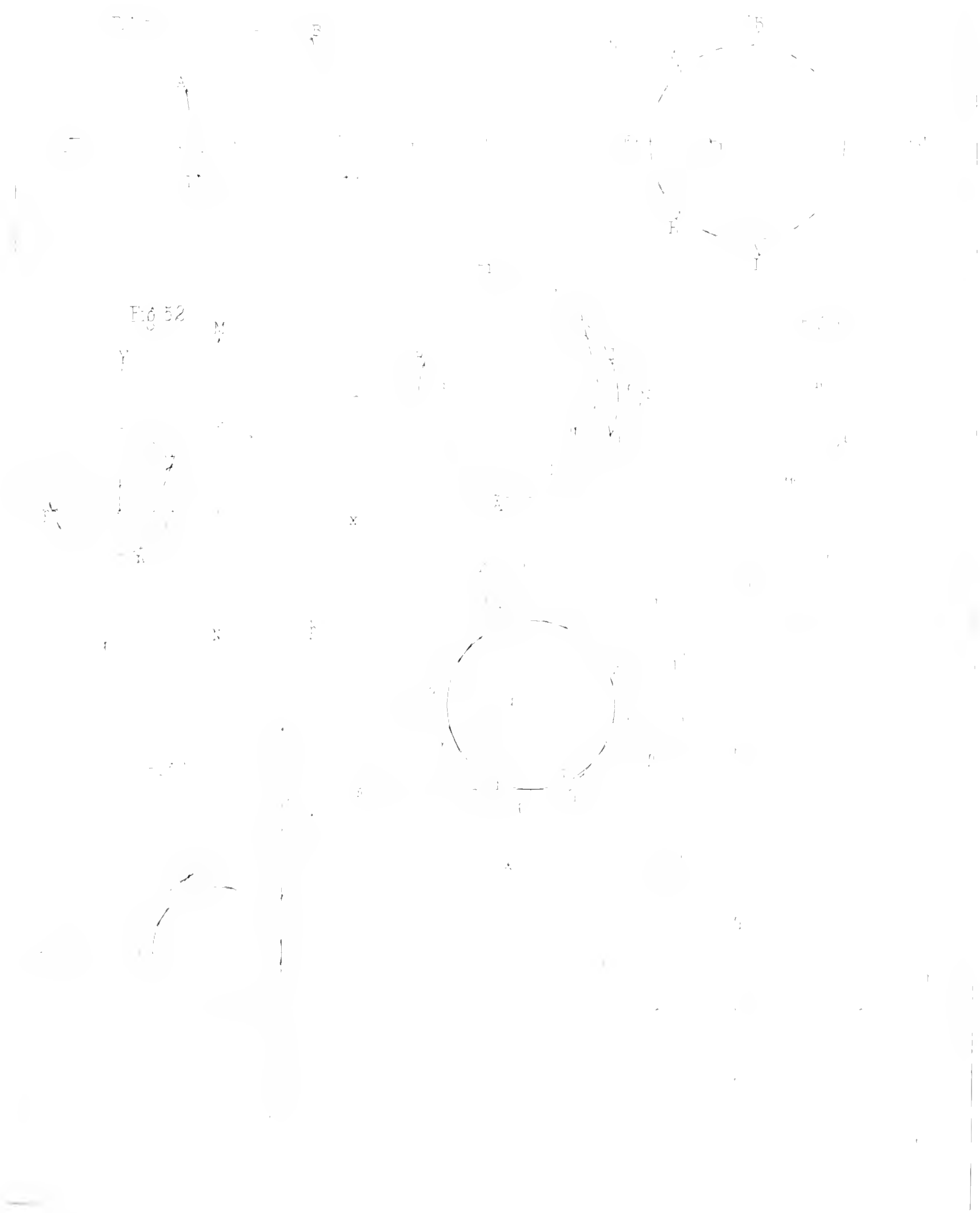


Fig 52